以下の $\boxed{}$ にあてはまる式または数値を，解答用紙 (省略) の同じ記号のついた欄に記入せよ．また，(3) の問いについて，記述欄 (省略) に過程も含めて解答せよ．

xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は関係式

$$u = x + y, \quad v = xy$$

により，uv 平面上の点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ に変換されるとする．

(1) P が y 軸上を動くとき，Q の軌跡の方程式を v の式で表すと $\boxed{\text{ア}}$ である．また，P が直線 $y = x$ 上を動くとき，Q の軌跡の方程式を u と v の式で表すと $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) P が xy 平面全体を動くとき，Q が動く uv 平面上の領域を D とする．uv 平面上の点 $(u,\ 1)$ が D に含まれるような u の値の範囲は $\boxed{\text{ウ}}$ であり，uv 平面上の点 $(1,\ v)$ が D に含まれるような v の値の範囲は $\boxed{\text{エ}}$ である．D は不等式 $v \leqq \boxed{\text{オ}}$ によって表すことができる．

(3) P が領域 $x^2 + y^2 \leqq 1$ 全体を動くとき，Q の動く領域を E とする．E を図示し，その面積を求めよ．

(25 京都産大 文系 1 月 26 日 3)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ
$v = 0$	$v = \dfrac{u^2}{4}$	$u \leqq -2$ または $2 \leqq u$	$v \leqq \dfrac{1}{4}$	$\dfrac{u^2}{4}$

(3) 図略 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

【解答】

$$\mathrm{P}(x,\ y) \longrightarrow \mathrm{Q}(u,\ v) : (*) \begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$$

(1) P が y 軸上を動くとき，$x = 0$ であり

$$\begin{cases} u = y \\ v = 0 \end{cases}$$

である．y は実数全体を動くから，Q の軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{v = 0} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．また，P が直線 $y = x$ 上を動くとき

$$\begin{cases} u = x + x = 2x \\ v = x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{u}{2} \\ v = \left(\dfrac{u}{2}\right)^2 \end{cases}$$

であるから，Q の軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{v = \dfrac{u^2}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) P が xy 平面全体を動くときの Q が動く uv 平面上の領域 D は，$x,\ y$ がそれぞれ実数全体を動くときの $(*)$ を満たす uv 平面上の点 $(u,\ v)$ の集合である．

$(*) \iff x,\ y$ は t の 2 次方程式 $t^2 - ut + v = 0$ …… ① の 2 つの実数解である

(①の判別式) $\geqq 0$ であるから

$$u^2 - 4v \geqq 0 \qquad \therefore \quad v \leqq \frac{u^2}{4} \qquad \cdots\cdots ②$$

である．

uv 平面上の点 $(u,\ 1)$ が D に含まれるような u の値の範囲は

$$1 \leqq \frac{u^2}{4} \qquad \therefore \quad 4 \leqq u^2 \qquad \therefore \quad (u+2)(u-2) \geqq 0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{u \leqq -2} \text{ **または** } \boldsymbol{2 \leqq u} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり，uv 平面上の点 $(1,\ v)$ が D に含まれるような v の値の範囲は

$$v \leqq \frac{1^2}{4} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{v \leqq \frac{1}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

D は表す不等式は ② より

$$\boldsymbol{v \leqq \frac{u^2}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) P が領域 $x^2 + y^2 \leqq 1$ …… ③ 全体を動くときの Q の動く領域 E は

「③ かつ $(*)$」を満たす実数 $x,\ y$が存在するような点 $(u,\ v)$ の集合

である．ここで，③ は

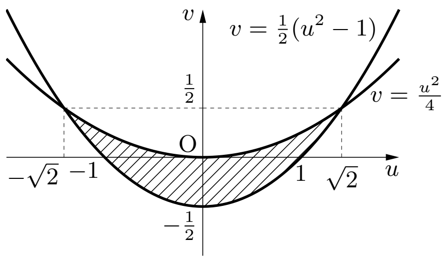
$$(x+y)^2 - 2xy \leqq 1$$

と変形されるから

「③ かつ $(*)$」$\iff$「$(*)$ かつ $u^2 - 2v \leqq 1$」

であり，求める領域 E は

$$\begin{cases} v \leqq \dfrac{u^2}{4} \\ v \geqq \dfrac{1}{2}(u^2 - 1) \end{cases}$$



である．これを図示すると右図の斜線部分となる．

E の面積を S とおくと

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left\{ \frac{u^2}{4} - \frac{1}{2}(u^2 - 1) \right\} du \\ &= -\frac{1}{4}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (u+\sqrt{2})(u-\sqrt{2})\, du \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{(2\sqrt{2})^3}{6} \\ &= \boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．