

座標平面上において、双曲線 $C: x^2 - y^2 = 1$ と直線 $l: y = 2x + k$ を考える。ただし、 k は実数とする。

- (i) $x < 0$ において、 C と l が交点をもつための k の条件は $\sqrt{\boxed{\text{ウ}}} \leq k$ である。また、 $x < 0$ において、 C と l が接するときの接点の座標 (x, y) は

$$\left(-\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \sqrt{\boxed{\text{カ}}}, -\frac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}} \right)$$

である。

- (ii) $x < 0$ と $\sqrt{\boxed{\text{ウ}}} < k$ を同時に満たすときにおいて、 C と l の2つの交点の中点を P とする。 $\sqrt{\boxed{\text{ウ}}} < k$ の範囲で k を動かすとき、点 P の軌跡は $\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} x$ の

$x < -\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ の部分である。

- (iii) $x < 0$ において、 C と l が2つの交点 Q_1, Q_2 をもつとする。線分 Q_1Q_2 の長さを k の式で表すと

$$Q_1Q_2 = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \sqrt{\boxed{\text{タ}} k^2 - \boxed{\text{チ}} \boxed{\text{ツ}}}$$

となる。また、線分 Q_1Q_2 の長さが2であるとき、 $k = \frac{\boxed{\text{テ}} \sqrt{\boxed{\text{ト}} \boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ となる。

(25 東京理科大 理学部 第一部 1(2))

【答】

ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チツ	テ	トナ	ニ
3	2	3	3	3	3	1	2	2	3	3	2	3	5	15	2	30	5

【解答】

$$\text{双曲線 } C: x^2 - y^2 = 1$$

$$\text{直線 } l: y = 2x + k \quad (k \text{ は実数})$$

- (i) $x < 0$ において、 C と l が交点をもつための k の条件は

$$x^2 - (2x + k)^2 = 1$$

$$\therefore 3x^2 + 4kx + k^2 + 1 = 0$$

が負の実数解 x をもつことである。 $f(x) = 3x^2 + 4kx + k^2 + 1$ とおくと

$$f(x) = 3 \left(x + \frac{2}{3}k \right)^2 - \frac{k^2}{3} + 1$$

$f(0) = k^2 + 1 > 0$ であるから、求める条件は「頂点が x 軸の負の部分または第4象限にある」ことである。

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}k < 0 \\ -\frac{k^2}{3} + 1 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k > 0 \\ k^2 - 3 \geq 0 \end{cases} \therefore \sqrt{3} \leq k \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

また、 $x < 0$ において C と l が接する条件は「 $f(x) = 0$ が負の重解をもつ」ことであり

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}k < 0 \\ -\frac{k^2}{3} + 1 = 0 \end{cases} \quad \therefore k = \sqrt{3}$$

である。このとき接点の x 座標、 y 座標は

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2}{3}\sqrt{3}, \\ y &= 2\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) + \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

であり、接点の座標は $\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ である。……(答)

(ii) (i) より

$$\sqrt{3} < k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

のとき、 $f(x) = 0$ は異なる 2 つの負の実数解をもつ。この 2 解を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、 C と l の 2 つの交点の midpoint P の座標 (x, y) は

$$\begin{cases} x = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ y = 2 \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} + k \end{cases}$$

である。解と係数の関係より $\alpha + \beta = -\frac{4}{3}k$ であるから

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3}k & \dots\dots \textcircled{2} \\ y = -\frac{k}{3} & \dots\dots \textcircled{3} \end{cases}$$

であり、P の軌跡は「 $\textcircled{1}$ かつ $\textcircled{2}$ かつ $\textcircled{3}$ 」を満たす実数 k が存在するような点 (x, y) の集合である。

$$\text{「}\textcircled{1} \text{ かつ } \textcircled{2} \text{ かつ } \textcircled{3}\text{」} \iff \begin{cases} k = -\frac{3}{2}x \\ \sqrt{3} < -\frac{3}{2}x \\ y = -\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}x\right) \end{cases} \iff \begin{cases} k = -\frac{3}{2}x \\ x < -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

であり、P の軌跡は

$$y = \frac{1}{2}x \text{ の } x < -\frac{2}{3}\sqrt{3} \text{ の部分} \quad \dots\dots \text{(答)}$$

である。

(iii) $x < 0$ において、 C と l が 2 つの交点 Q_1, Q_2 をもつのは、 k が $\textcircled{1}$ を満たすときであり、このときの 2 解が α, β ($\alpha < \beta$) であるから

$$\begin{aligned} Q_1Q_2 &= (\beta - \alpha)\sqrt{1^2 + 2^2} \\ &= \left(\frac{-2k + \sqrt{k^2 - 3}}{3} - \frac{-2k - \sqrt{k^2 - 3}}{3}\right)\sqrt{5} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{5k^2 - 15} \end{aligned} \quad \dots\dots \text{(答)}$$

となる。また、線分 Q_1Q_2 の長さが 2 であるとき

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\sqrt{5k^2 - 15} &= 2 \\ 5k^2 - 15 &= 9 \end{aligned}$$

$$\therefore k = \sqrt{\frac{24}{5}} = \frac{2\sqrt{30}}{5} \quad (\because \textcircled{1}) \quad \dots\dots \text{(答)}$$

となる。