

$xy$  平面上に点  $O(0, 0)$ ,  $A(4, 0)$  と, 円  $C: x^2 + y^2 = 4$  上を動く点  $P(a, b)$  があるとする. 各点  $P$  に対して, 線分  $AP$  の垂直二等分線を  $\ell_P$  とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 直線  $\ell_P$  の方程式を求めよ.
- (2) 直線  $OP$  と  $\ell_P$  が平行であるとき,  $P$  の座標を求めよ.
- (3) 直線  $OP$  と  $\ell_P$  が交点をもつとき, 交点  $Q$  の軌跡の方程式を求め, さらにその軌跡を図示せよ.

(25 岡山大 理系 3)

【答】

(1)  $\ell_P: (a-4)x + by + 6 = 0$

(2)  $P(1, \pm\sqrt{3})$

(3)  $(x-2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

【解答】

$$C: x^2 + y^2 = 4$$

- (1)  $\ell_P$  は線分  $AP$  の垂直二等分線であり,  $\ell_P$  上の点を  $R(x, y)$  とおくと

$$AR = PR$$

が成り立つ.  $A, P$  の座標は  $A(4, 0), P(a, b)$  であるから

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

$$\iff (x-4)^2 + y^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

$a^2 + b^2 = 4$  に注意すると,  $\ell_P$  の方程式は

$$-8x + 16 = -2ax - 2by + a^2 + b^2$$

$$2(a-4)x + 2by + 16 - 4 = 0$$

$$\therefore \ell_P: (a-4)x + by + 6 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots (\text{答})$$

である.

- 線分  $AP$  の垂直二等分線  $\ell_P$  は線分  $AP$  の中点  $\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b}{2}\right)$  を通り,  $\overrightarrow{AP} = (a-4, b)$  に垂直な直線であるから, その方程式は

$$(a-4)\left(x - \frac{a+4}{2}\right) + b\left(y - \frac{b}{2}\right) = 0$$

$$(a-4)x + by - \frac{a^2 - 16}{2} - \frac{b^2}{2} = 0$$

$$\therefore \ell_P: (a-4)x + by + 6 = 0 \quad (\because a^2 + b^2 = 4)$$

である.

- (2) 直線  $OP$  と  $\ell_P$  が平行であるための条件は

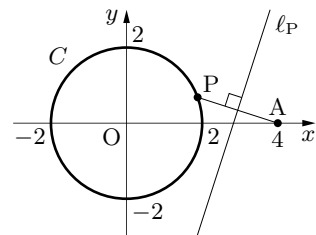
$$\overrightarrow{OP} \perp (\ell_P \text{ の法線ベクトル})$$

であるから

$$(a, b) \cdot (a-4, b) = 0$$

$$a(a-4) + b^2 = 0$$

$$4 - 4a = 0 \quad (\because a^2 + b^2 = 4) \quad \therefore a = 1$$



である. このとき

$$1^2 + b^2 = 4 \quad \therefore b = \pm\sqrt{3}$$

であるから, P の座標は

$$\mathbf{P}(1, \pm\sqrt{3}) \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

(3) 直線 OP :  $bx - ay = 0$  …… ② と  $\ell_P$  が交点をもつのは

$$(a, b) \neq (1, \pm\sqrt{3})$$

のときであり, このときの直線 OP と  $\ell_P$  の交点 Q の座標を  $(x, y)$  とおくと, Q の軌跡は

$$\text{「① かつ ② かつ } a^2 + b^2 = 4\text{」} \quad \dots\dots (*)$$

を満たす実数  $a, b$  が存在するような点  $(x, y)$  の集合である.

まず

$$\begin{aligned} \text{「① かつ ②」} &\iff \begin{cases} (a-4)x + by + 6 = 0 \\ bx = ay \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \neq 0 \\ b = \frac{ay}{x} \\ (a-4)x + \frac{ay}{x}y + 6 = 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x = 0 \\ ay = 0 \\ by + 6 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \neq 0 \\ b = \frac{ay}{x} \\ a(x^2 + y^2) - 4x^2 + 6x = 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x = 0 \\ b = -\frac{6}{y} \\ a = 0 \end{cases} \\ &\iff (\text{ア}) \begin{cases} x \neq 0 \\ a = \frac{4x^2 - 6x}{x^2 + y^2} \\ b = \frac{(4x-6)y}{x^2 + y^2} \end{cases} \quad \text{または} \quad (\text{イ}) \begin{cases} x = 0 \\ a = 0 \\ b = -\frac{6}{y} \end{cases} \end{aligned}$$

であり

$$(*) \iff (\text{i}) \text{「(ア) かつ } a^2 + b^2 = 4\text{」}$$

または

$$(\text{ii}) \text{「(イ) かつ } a^2 + b^2 = 4\text{」}$$

である.

(i) 「(ア) かつ  $a^2 + b^2 = 4$ 」より

$$\left(\frac{4x^2 - 6x}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left\{\frac{(4x-6)y}{x^2 + y^2}\right\}^2 = 4$$

$$\frac{(2x-3)^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 1$$

$$4x^2 - 12x + 9 = x^2 + y^2$$

$$3x^2 - y^2 - 12x + 9 = 0$$

$$\therefore (x-2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1$$

であり, (i) を満たす実数  $a, b$  が存在するような点  $(x, y)$  の集合は

$$(x-2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \text{ かつ } x \neq 0$$

である.

(ii) 「(イ) かつ  $a^2 + b^2 = 4$ 」より

$$0^2 + \left(-\frac{6}{y}\right)^2 = 4$$

$$y^2 = 9 \quad \therefore y = \pm 3$$

であり, (ii) を満たす実数  $a, b$  が存在するような点  $(x, y)$  の集合は

$$(x, y) = (0, \pm 3)$$

である.

(i), (ii) をあわせると, Q の軌跡の方程式は

$$(x - 2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1$$

……(答)

である. 図示すると右図の太線となる.

