

一辺の長さが1で $\angle AOB = 120^\circ$ のひし形 $OACB$ を考える. 線分 OA を $1:3$ に内分する点を D とし, 線分 CD の中点を E とする. E を通り直線 CD と直交する直線と, 直線 OB の交点を F とする. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく.

- (1) \overrightarrow{OD} , \overrightarrow{OE} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ.
- (2) \overrightarrow{OF} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ.
- (3) 四角形 $ODEF$ の面積を求めよ.

(25 東京海洋大 海洋工 2)

【答】

- (1) $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{4}\vec{a}$, $\overrightarrow{OE} = \frac{5}{8}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$
- (2) $\overrightarrow{OF} = \frac{3}{4}\vec{b}$
- (3) $\frac{19\sqrt{3}}{128}$

【解答】

- (1) D は線分 OA を $1:3$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{4}\vec{a} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である. また, E は線分 CD の中点であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= \frac{\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4}\vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) \right\} \\ &= \frac{5}{8}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \end{aligned}$$

である.

- (2) F は直線 OB 上の点であるから, 実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OF} = k\vec{b}$$

と表すことができる. $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{EF}$ であるから

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立つ.

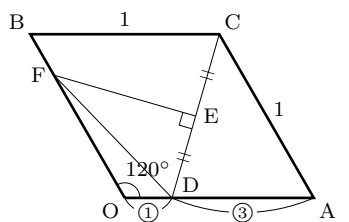
$$\begin{aligned} \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EF} &= \left\{ \frac{1}{4}\vec{a} - (\vec{a} + \vec{b}) \right\} \cdot \left\{ k\vec{b} - \left(\frac{5}{8}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right) \right\} \\ &= \left(-\frac{3}{4}\vec{a} - \vec{b} \right) \cdot \left\{ -\frac{5}{8}\vec{a} + \left(k - \frac{1}{2} \right) \vec{b} \right\} \\ &= \frac{15}{32}|\vec{a}|^2 + \left\{ -\frac{3}{4} \left(k - \frac{1}{2} \right) + \frac{5}{8} \right\} \vec{a} \cdot \vec{b} - \left(k - \frac{1}{2} \right) |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

ここで, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 \times \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EF} &= \frac{15}{32} - \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{4}k + 1 \right) - \left(k - \frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{5}{8}k + \frac{15}{32} \end{aligned}$$

となる. $\textcircled{1}$ より

$$-\frac{5}{8}k + \frac{15}{32} = 0 \quad \therefore k = \frac{15}{32} \times \frac{8}{5} = \frac{3}{4}$$



$\dots\dots(\text{答})$

である. よって

$$\overrightarrow{OF} = \frac{3}{4} \vec{b}$$

……(答)

である.

(3) 四角形 ODEF の面積 S は

$$S = \triangle ODF + \triangle DEF$$

である. まず

$$\triangle ODF = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \sin 120^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{64}$$

である. つぎに

$$\begin{aligned} DE &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{CD}| = \frac{1}{2} \left| -\frac{3}{4} \vec{a} - \vec{b} \right| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9}{16} + 2 \times \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9 - 12 + 16}{16}} \\ &= \frac{\sqrt{13}}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EF &= \left| -\frac{5}{8} \vec{a} + \frac{1}{4} \vec{b} \right| \\ &= \sqrt{\frac{25}{64} - 2 \times \frac{5}{32} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{25 + 10 + 4}{64}} \\ &= \frac{\sqrt{39}}{8} \end{aligned}$$

であるから

$$\triangle DEF = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{8} \times \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{13\sqrt{3}}{128}$$

である. よって

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{64} + \frac{13\sqrt{3}}{128} = \frac{19\sqrt{3}}{128}$$

……(答)

である.