平面上の 3 点 O，A，B は

$$\mathrm{OA}=\sqrt{5},\quad \mathrm{OB}=\sqrt{7},\quad \mathrm{AB}=\sqrt{6}$$

を満たすとする．また，直線 OB に関して A と対称な点を C，線分 OB の中点を M とし，2 直線 CM，AB の交点を D とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boxed{11}$

(2) △OAB の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{12}\boxed{13}}}{\boxed{14}}$ である．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{\boxed{15}}{\boxed{16}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\boxed{17}}{\boxed{18}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{\boxed{19}}{\boxed{20}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(5) △BMD の面積は $\dfrac{\boxed{21}\sqrt{\boxed{22}\boxed{23}}}{\boxed{24}\boxed{25}}$ である．

(25 青山学院大 理工 B 2)

【答】

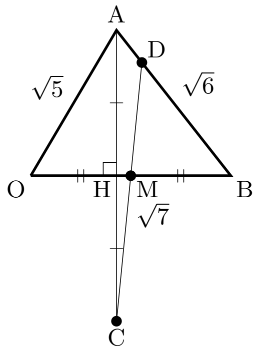
11	1213	14	15	16	17	18	19	20	21	2223	2425
3	26	2	6	7	7	9	2	9	7	26	36

【解答】

$$\mathrm{OA}=\sqrt{5},\ \mathrm{OB}=\sqrt{7},\ \mathrm{AB}=\sqrt{6}\qquad \cdots\cdots(*)$$

(1) $(*)$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=6$$
$$7-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5=6$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{12-6}{2}=\mathbf{3}\qquad\cdots\cdots(答)$$



である．

(2) △OAB の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{5\times7-3^2}\\&=\frac{\boldsymbol{\sqrt{26}}}{\mathbf{2}}\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(3) C は A の直線 OB に関する対称点である．A から直線 OB に下した垂線の足を H とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{AH}}\\&=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=2\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\angle\mathrm{AOB}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=2\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\quad(\overrightarrow{\mathrm{OH}}\text{ は }\overrightarrow{\mathrm{OA}}\text{ の }\overrightarrow{\mathrm{OB}}\text{への正射影ベクトル})\end{aligned}$$

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2\times\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{\frac{6}{7}}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) D は直線 CM 上の点であり，M は線分 OB の中点であるから，実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+k\overrightarrow{\mathrm{CM}}\\&=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+k\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\&=(1-k)\left(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{6}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)+\frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad(\because\ (3))\\&=(k-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{12-5k}{14}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

と表すことができる．D は直線 AB 上の点でもあるから

$$(k-1)+\frac{12-5k}{14}=1$$

$$9k-2=14 \qquad \therefore\quad k=\frac{16}{9}$$

である．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\boldsymbol{\frac{7}{9}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boldsymbol{\frac{2}{9}}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(5) (4) より，D は線分 AB を 2 : 7 に内分する点であるから

$$\triangle\mathrm{BMD}=\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{OB}}\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}}\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times\frac{7}{9}\times\frac{\sqrt{26}}{2}=\boldsymbol{\frac{7\sqrt{26}}{36}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．