

座標空間において、2つのベクトル  $\vec{a} = (2, -1, 4)$ ,  $\vec{b} = (-1, 0, -1)$  の両方に垂直で、大きさが  $5\sqrt{6}$  のベクトルのうち、 $x$  成分が正であるベクトルを  $\vec{p}$  とする  
と、 $\vec{p} = \boxed{(\text{つ})}$  である。

(25 茨城大 後 工 2(5))

(つ)
(5, -10, -5)

【解答】

$\vec{a} = (2, -1, 4)$ ,  $\vec{b} = (-1, 0, -1)$  の両方に垂直で、大きさが  $5\sqrt{6}$  のベクトル  $\vec{p}$  の成分を  $(p, q, r)$  ( $p > 0$ ) とおく。

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{p} = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{p} = 0 \\ |\vec{p}| = 5\sqrt{6} \end{cases} \iff \begin{cases} 2p - q + 4r = 0 \\ -p - r = 0 \\ p^2 + q^2 + r^2 = 25 \times 6 \end{cases} \iff \begin{cases} r = -p \\ q = -2p \\ 6p^2 = 25 \times 6 \end{cases}$$

$p > 0$  に注意すると

$$p = 5, q = -10, r = -5$$

である。よって

$$\vec{p} = (5, -10, -5) \quad \dots\dots (\text{答})$$

である。

- $\vec{b} = (-1, 0, -1)$  に垂直なベクトルの一つとして  $(1, q, -1)$  をとることができます。  
これが  $\vec{a}$  と垂直であるためには

$$(1, q, -1) \cdot (2, -1, 4) = 0$$

$$2 - q - 4 = 0 \quad \therefore \quad q = -2$$

である。 $\vec{p}$  はベクトル  $(1, -2, -1)$  と平行であり、大きさが  $5\sqrt{6}$  である。 $\vec{p}$  の  $x$  成分が正であることに注意すると

$$\vec{p} = 5\sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{1+4+1}} (1, -2, -1) = (5, -10, -5)$$

である。