

座標空間において、2つのベクトル $\vec{a} = (2, -1, 4)$, $\vec{b} = (-1, 0, -1)$ の両方に垂直で、大きさが $5\sqrt{6}$ のベクトルのうち、 x 成分が正であるベクトルを \vec{p} とすると、 $\vec{p} = \boxed{\text{(つ)}}$ である。

(25 茨城大 後 工 2(5))

【答】

(つ)
(5, -10, -5)

【解答】

$\vec{a} = (2, -1, 4)$, $\vec{b} = (-1, 0, -1)$ の両方に垂直で、大きさが $5\sqrt{6}$ のベクトル \vec{p} の成分を (p, q, r) ($p > 0$) とおく。

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{p} = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{p} = 0 \\ |\vec{p}| = 5\sqrt{6} \end{cases} \iff \begin{cases} 2p - q + 4r = 0 \\ -p - r = 0 \\ p^2 + q^2 + r^2 = 25 \times 6 \end{cases} \iff \begin{cases} r = -p \\ q = -2p \\ 6p^2 = 25 \times 6 \end{cases}$$

$p > 0$ に注意すると

$$p = 5, q = -10, r = -5$$

である。よって

$$\vec{p} = (5, -10, -5) \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

- $\vec{b} = (-1, 0, -1)$ に垂直なベクトルの一つとして $(1, q, -1)$ をとることができる。
これが \vec{a} と垂直であるためには

$$\begin{aligned} (1, q, -1) \cdot (2, -1, 4) &= 0 \\ 2 - q - 4 &= 0 \quad \therefore q = -2 \end{aligned}$$

である。 \vec{p} はベクトル $(1, -2, -1)$ と平行であり、大きさが $5\sqrt{6}$ である。 \vec{p} の x 成分が正であることに注意すると

$$\vec{p} = 5\sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{1+4+1}}(1, -2, -1) = (5, -10, -5)$$

である。