1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF の辺 AB の中点を M とする．辺 BC 上に $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となる点 P，辺 EF 上に $\overrightarrow{\mathrm{EQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ となる点 Q をとる．ただし，$0 \leqq t \leqq 1$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とする．点 P が辺 BC の中点のとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ の内積を最大にする t の値を求めよ．また，そのときの最大値を求めよ．

(25 茨城大 教育・地域未来共創 3)

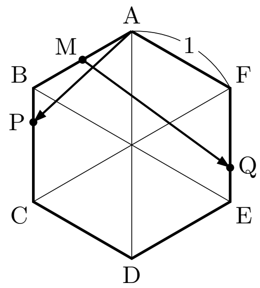
【答】

(1) $-\dfrac{\sqrt{7}}{14}$

(2) $t = \dfrac{3}{8}$ のとき，最大値 $-\dfrac{23}{64}$

【解答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b}$ とおく．



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{BC}} \\
&= \vec{a} + t(\vec{a} + \vec{b}) \\
&= (1+t)\vec{a} + t\vec{b}, \\
\overrightarrow{\mathrm{MQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{AQ}} - \overrightarrow{\mathrm{AM}} \\
&= \{\overrightarrow{\mathrm{AF}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{FE}}\} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= \{\vec{b} + (1-t)(\vec{a} + \vec{b})\} - \frac{1}{2}\vec{a} \\
&= \left(\frac{1}{2} - t\right)\vec{a} + (2-t)\vec{b},
\end{aligned}$$

である．$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ = 1 \times 1 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MQ}} &= \left\{(1+t)\vec{a} + t\vec{b}\right\}\cdot\left\{\left(\frac{1}{2} - t\right)\vec{a} + (2-t)\vec{b}\right\} \\
&= (1+t)\left(\frac{1}{2} - t\right) - \frac{1}{2}\left\{(1+t)(2-t) + t\left(\frac{1}{2} - t\right)\right\} + t(2-t) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t - t^2\right) - \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}t - 2t^2\right) + (2t - t^2) \\
&= -t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

である．

点 P が辺 BC の中点，すなわち $t = \dfrac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 &= \left|\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right|^2 = \frac{1}{4}\left\{9 + 6\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right\} = \frac{7}{4}, \\
|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|^2 &= \left|\frac{3}{2}\vec{b}\right|^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

また，① より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MQ}} = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\times\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ のなす角 θ ($0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$) について

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|} = \frac{-\dfrac{3}{8}}{\dfrac{\sqrt{7}}{2}\times\dfrac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{7}} = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{7}}{14}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) ① を変形すると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MQ}} = -\left(t-\frac{3}{8}\right)^2 - \frac{23}{64}$$

となる．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ は

$\boldsymbol{t = \frac{3}{8}}$**のとき，最大値** $\boldsymbol{-\frac{23}{64}}$ ……(答)

をとる．