$\triangle$OAB は鋭角三角形であり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 4, \quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 3$$

を満たしている．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = k$ とおくとき，以下の問に答えよ

(1) k のとり得る値の範囲を求めよ．

上で与えた $\triangle$OAB の頂点 A，B からそれぞれの対辺に下ろした 2 本の垂線の交点を H とし，辺 AB を $2:1$ に内分する点を C とする．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および k を用いて表せ．

(3) 3 点 O，H，C が同一直線上にあるとき，k の値と $\dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OC}}$ を求めよ．

(25 青山学院大 理工 A 5)

【答】

(1) $0 < k < 9$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{k^2 - 9k}{k^2 - 144}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{k^2 - 16k}{k^2 - 144}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(3) $\dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OC}} = \dfrac{3}{10}$

【解答】

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 4, \quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 3, \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = k$$

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| > |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ であるから，$\triangle$OAB は鋭角三角形であるための条件は

$$(*) \begin{cases} |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 < |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \\ |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 < |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \end{cases}$$

が成り立つことである．

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 \\ &= 16 - 2k + 9 \\ &= 25 - 2k \end{aligned}$$

であり，$(*)$ を満たす k のとり得る値の範囲は

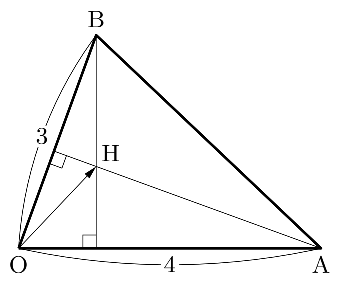
$$\begin{cases} 16 < (25 - 2k) + 9 \\ 25 - 2k < 16 + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k < 9 \\ 0 < k \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{0 < k < 9} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 実数 x，y を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表すことができる．



$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{(x-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}\} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 \\ \{x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (y-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k(x-1) + 9y = 0 \\ 16x + k(y-1) = 0 \end{cases}$$

が成り立つ．x, y について解く．

$$\begin{cases} kx + 9y = k & \cdots\cdots ① \\ 16x + ky = k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① × k − ② × 9 より

$$(k^2 - 144)x = k^2 - 9k \qquad \therefore \quad x = \frac{k^2 - 9k}{k^2 - 144} \quad (\because\ 0 < k < 9)$$

② × k − ① × 16 より

$$(k^2 - 144)y = k^2 - 16k \qquad \therefore \quad y = \frac{k^2 - 16k}{k^2 144} \quad (\because\ 0 < k < 9)$$

であり

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{k^2 - 9k}{k^2 - 144}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{k^2 - 16k}{k^2 - 144}\overrightarrow{\mathrm{OB}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) C は辺 AB を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$$

である．3 点 O，H，C が同一直線上あるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

すなわち

$$\frac{k^2 - 9k}{k^2 - 144}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{k^2 - 16k}{k^2 - 144}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{t}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2t}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表すことができる．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ はいずれも $\vec{0}$ でなく，平行でもないから

$$\begin{cases} \dfrac{k^2 - 9k}{k^2 - 144} = \dfrac{t}{3} \\ \dfrac{k^2 - 16k}{k^2 - 144} = \dfrac{2t}{3} \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \dfrac{t}{3} = \dfrac{k^2 - 9k}{k^2 - 144} \\ \dfrac{k^2 - 16k}{k^2 - 144} = 2\dfrac{k^2 - 9k}{k^2 - 144} \end{cases}$$

が成り立つ．第 2 式を整理すると

$$k^2 - 16k = 2(k^2 - 9k)$$

$$k^2 - 2k = 0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{k = 2} \quad (\because\ 0 < k < 9) \qquad \cdots\cdots(答)$$

このとき，t の値は

$$t = \frac{3(4 - 18)}{4 - 144} = \frac{3 \times 14}{140} = \frac{3}{10}$$

である．

　よって

$$\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OC}} = t = \boldsymbol{\frac{3}{10}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．