座標空間の 4 点 O，A，B，C は同一平面上にないとする．$s,\ t,\ u$ は 0 でない実数とする．直線 OA 上の点 L，直線 OB 上の点 M，直線 OC 上の点 N を

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成り立つようにとる．

(1) $s,\ t,\ u$ が $\dfrac{1}{s} + \dfrac{2}{t} + \dfrac{3}{u} = 4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき，3 点 L，M，N の定める平面は $s,\ t,\ u$ の値に無関係な一定の点 P を通ることを示せ．さらに，そのような点 P はただ一つに定まることを示せ．

(2) 四面体 OABC の体積を V とする．(1) における点 P について，四面体 PABC の体積を V を用いて表せ．

(25 京都大 理系 4)

【答】

(1) 略

(2) $\dfrac{1}{2}V$

【解答】

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = u\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad (s,\ t,\ u \text{ は 0 でない実数}) \qquad \cdots\cdots ①$$

(1)
$$\frac{1}{s} + \frac{2}{t} + \frac{3}{u} = 4 \qquad \cdots\cdots ②$$

② は

$$\frac{1}{4s} + \frac{1}{2t} + \frac{3}{4u} = 1$$

と変形されるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{4s}\overrightarrow{\mathrm{OL}} + \frac{1}{2t}\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \frac{3}{4u}\overrightarrow{\mathrm{ON}}$$

により定められる点 P は平面 LMN 上の点である．また，① より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{1}{4s}\left(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) + \frac{1}{2t}(t\overrightarrow{\mathrm{OB}}) + \frac{3}{4u}(u\overrightarrow{\mathrm{OC}})\\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

であるから，P は定点である．よって，平面 LMN は $s,\ t,\ u$ の値に無関係な定点 P を通ることが示された． …… (証明終わり)

$s,\ t,\ u$ が ①，② を満たしながら動くとき，$s,\ t,\ u$ により決まる平面 LMN は 2 つの定点 P，Q (P $\neq$ Q) を通ると仮定する．

$s = 1$ として $t,\ u$ を ② を満たすように動かす．異なる組 $(t_1,\ u_1)$，$(t_2,\ u_2)$ により決まる 2 つの平面 LMN をそれぞれ $\alpha_1,\ \alpha_2$ とおくと，$\alpha_1,\ \alpha_2$ は平行でないから，交線が存在する．P，Q はともに $\alpha_1,\ \alpha_2$ 上にあるから，その交線は組 $(t,\ u)$ に無関係な定直線 PQ である．また，$s = 1$ より，L = A であり，A は平面 LMN 上の定点である．したがって，A も定直線 PQ 上の点である．

同じく，$t = 1$ として $s,\ u$ を ② を満たすように動かすと，M = B であり，B は定直線 PQ 上の点である．

$u = 1$ として $s,\ t$ を ② を満たすように動かすと，N = C であり，C は定直線 PQ 上の点である．

したがって，A，B，C は定直線 PQ 上の点である．これは 4 点 O，A，B，C は同一平面上にないことに反する．

よって，平面 LMN 上に P と異なる定点 Q は存在せず，P はただ一つに定まることが示された． …… (証明終わり)

- 平面 LMN 上の点 X を実数 $x,\ y,\ z$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}} + z\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表す．$s,\ t,\ u$ は ①, ② を満たすから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OX}} &= \frac{x}{s}\overrightarrow{\mathrm{OL}} + \frac{y}{t}\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \frac{z}{u}\overrightarrow{\mathrm{ON}} \quad (\because\ ①)\\ &= x\left(4 - \frac{2}{t} - \frac{3}{u}\right)\overrightarrow{\mathrm{OL}} + \frac{y}{t}\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \frac{z}{u}\overrightarrow{\mathrm{ON}} \quad (\because\ ②)\end{aligned}$$

X は平面 LMN 上の点であるから

$$\begin{aligned}&x\left(4 - \frac{2}{t} - \frac{3}{u}\right) + \frac{y}{t} + \frac{z}{u} = 1\\ \therefore\quad &4x + \frac{y-2x}{t} + \frac{z-3x}{u} = 1\end{aligned}$$

これが 0 でない任意の $t,\ u$ について成り立つ条件は

$$\begin{cases}4x = 1\\ y - 2x = 0\\ z - 3x = 0\end{cases} \qquad \therefore\quad x = \frac{1}{4},\ y = \frac{1}{2},\ z = \frac{3}{4}$$

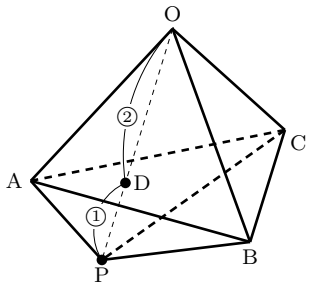
である．よって，$s,\ t,\ u$ の値に無関係な定点 X は

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

であり，X は P と一致する．すなわち，$s,\ t,\ u$ の値に無関係な定点は点 P ただ一つに定まる．

(2) (1) より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{6}{4}\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{6}\\ &= \frac{3}{2}\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{6}\end{aligned}$$



$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{6}$ とおくと，$\dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{6} + \dfrac{3}{6} = 1$ より，D は平面 ABC 上の点であり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$\therefore\quad \mathrm{OD} : \mathrm{DP} = 2 : 1$$

であり，四面体 OABC の体積が V であるとき，四面体 PABC と四面体 OABC は △ABC が共通なので

$$(\text{四面体 PABC の体積}) = \frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{OD}}V = \boldsymbol{\frac{1}{2}V}$$

……(答)

である．