四面体 OABC において，線分 OA の中点を L，線分 OB を $1:2$ に内分する点を M とし，点 O から直線 LM に下ろした垂線と直線 LM との交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，

$$|\vec{a}|=2\sqrt{2},\quad |\vec{b}|=3,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=3$$

であるとき，以下の空欄をうめよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{LM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{\mathrm{LM}}=\boxed{\text{イ}}$ である．また，$|\overrightarrow{\mathrm{LM}}|$ の値を求めると，$|\overrightarrow{\mathrm{LM}}|=\boxed{\text{ロ}}$ である．

(2) 点 H が線分 LM を $t:1-t$ に内分するとき，$t=\boxed{\text{ハ}}$ である．

(3) 線分 HC を $1:2$ に内分する点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boxed{\text{ニ}}$ である．さらに u を $0<u<1$ を満たす実数として，線分 OC を $u:1-u$ に内分する点を Q とする．点 Q が，3 点 A，B，P を通る平面上にあるとき，$u=\boxed{\text{ホ}}$ である．

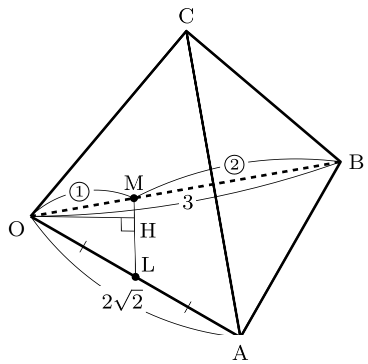
(25 会津大 4)

【答】

イ	ロ	ハ	ニ	ホ
$-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{11}{12}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$	$\frac{4}{9}$

【解答】

(1) L は線分 OA の中点，M は線分 OB を $1:2$ に内分する点であるから



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{LM}}&=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}}\end{aligned}$$ ……(答)

である．

また，$|\vec{a}|=2\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{LM}}|&=\frac{1}{6}|-3\vec{a}+2\vec{b}|\\&=\frac{1}{6}\sqrt{9|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}\\&=\frac{1}{6}\sqrt{9\times8-12\times3+4\times9}\\&=\frac{1}{6}\sqrt{72}\\&=\boldsymbol{\sqrt{2}}\end{aligned}$$ ……(答)

である．

(2) 点 O から直線 LM に下ろした垂線の足 H が線分 LM を $t:1-t$ に内分するとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OL}}+t\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\&=\frac{1-t}{2}\vec{a}+\frac{t}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

である．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{LM}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OH}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{LM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OH}} = 0$$
$$\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) \cdot \left(\frac{1-t}{2}\vec{a} + \frac{t}{3}\vec{b}\right) = 0$$
$$-\frac{1-t}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{-t+(1-t)}{6}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{t}{9}|\vec{b}|^2 = 0$$
$$\frac{t-1}{4} \times 8 + \frac{1-2t}{6} \times 3 + \frac{t}{9} \times 9 = 0$$
$$(2t-2) + \frac{1-2t}{2} + t = 0$$
$$2t - \frac{3}{2} = 0$$
$$\therefore \quad t = \boldsymbol{\frac{3}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{8}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$$

である．

(3) P は線分 HC を 1 : 2 に内分する点である．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \frac{2\overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{8}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\right) + \frac{1}{3}\vec{c} - \vec{a} \\ &= \boldsymbol{-\frac{11}{12}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}} \qquad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

である．

さらに u を $0 < u < 1$ を満たす実数として，線分 OC を $u : 1-u$ に内分する点を Q とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = u\vec{c}$$

であり，点 Q が，3 点 A，B，P を通る平面上にあるための条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdots\cdots ① \text{ を満たす実数 } \alpha,\ \beta \text{ が存在する}$$

ことである．

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = u\vec{c} - \vec{a}$$

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \alpha\left(-\frac{11}{12}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) + \beta(\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \left(-\frac{11}{12}\alpha - \beta\right)\vec{a} + \left(\frac{\alpha}{6} + \beta\right)\vec{b} + \frac{\alpha}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

であるから，① が成り立つ条件は

$$\begin{cases} -\dfrac{11}{12}\alpha - \beta = -1 \\ \dfrac{\alpha}{6} + \beta = 0 \\ \dfrac{\alpha}{3} = u \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} 11\alpha + 12\beta = 12 \\ \alpha + 6\beta = 0 \\ u = \dfrac{\alpha}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{4}{3},\ \beta = -\frac{2}{9},\ u = \boldsymbol{\frac{4}{9}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．