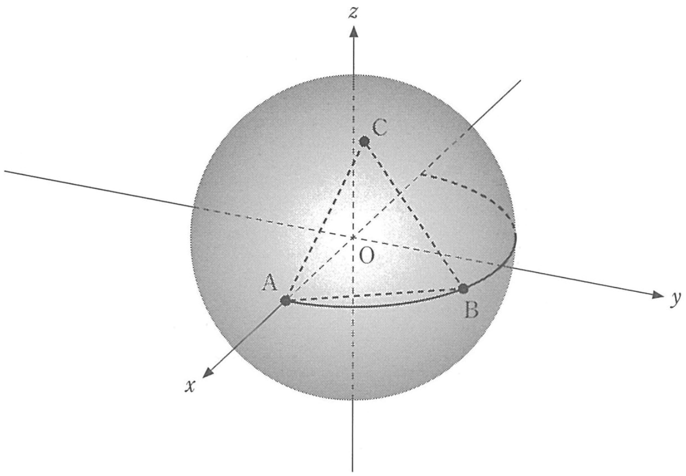
O を原点とする座標空間において，O を中心とする半径 1 の球面を S とする．S 上に二つの点 A(1, 0, 0)，B$\left(a,\ \sqrt{1-a^2},\ 0\right)$ をとる．ただし，a は $-1 < a < 1$ を満たす実数とする．S 上の点 C を，△ABC が正三角形となるようにとれるかどうかを考えてみよう．



参考図

(1) 点 C の座標を $(x,\ y,\ z)$ とする．C が S 上にあるとき

$$|\overrightarrow{OC}|^2 = \boxed{\text{ア}}$$

である．これをベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の成分を用いて表すと

$$x^2 + y^2 + z^2 = \boxed{\text{ア}} \qquad \cdots\cdots ①$$

となる．

さらに，△ABC が正三角形であるとする．△OAC と △OAB は，対応する三組の辺の長さがそれぞれ等しいから合同である．したがって，対応する角の大きさも等しいから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boxed{\text{イ}}$$

が成り立つ．これをベクトルの成分を用いて表すと

$$x = \boxed{\text{ウ}} \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．同様に △OBC と △OAB も合同であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boxed{\text{イ}}$$

が成り立ち，これをベクトルの成分を用いて表すと

$$\boxed{\text{エ}}\,x + \boxed{\text{オ}}\,y = \boxed{\text{ウ}} \qquad \cdots\cdots ③$$

となる．

逆に，実数 $x,\ y,\ z$ が ①, ②, ③ を満たすとき，$\mathrm{C}(x,\ y,\ z)$ は S 上の点であり，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形になっていることがわかる．

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\lvert\overrightarrow{\mathrm{AB}}\rvert$
③ $\lvert\overrightarrow{\mathrm{AB}}\rvert^2$	④ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$	⑤ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\boxed{\text{ウ}}$ ～ $\boxed{\text{オ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

⓪ a	① $(1+a)$	② $(1-a)$
③ a^2	④ $(1-a^2)$	⑤ $\sqrt{1-a^2}$

(2) a に具体的な値を代入して，$\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形となる S 上の点 C があるかどうかを調べよう．

(i) $a=\dfrac{3}{5}$ のとき，② と ③ を満たす実数 $x,\ y$ は

$$x=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}},\quad y=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$$

である．この $x,\ y$ に対して，① を満たす実数 z は $\boxed{\text{サ}}$．したがって，$\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形となる S 上の点 C は $\boxed{\text{サ}}$．

(ii) $a=-\dfrac{3}{5}$ のときも調べよう．(i) と同様に考えると，$\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形となる S 上の点 C は $\boxed{\text{シ}}$ ことがわかる．

$\boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{シ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

⓪ ない	① ちょうど一つある	② ちょうど二つある
③ ちょうど三つある	④ ちょうど四つある	⑤ 無限に多くある

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形となる S 上の点 C があるための，a に関する条件を見つけよう．

実数 $x,\ y,\ z$ は，①, ②, ③ を満たすとする．② と ③ から

$$x=\boxed{\text{ウ}},\quad y=\frac{\boxed{\text{ウ}}\left(1-\boxed{\text{エ}}\right)}{\boxed{\text{オ}}}$$

である．このとき，① から

$$z^2=\boxed{\text{ア}}-x^2-y^2=-\frac{\boxed{\text{ス}}}{1+a}$$

となる．さらに，$z^2\geqq 0,\ 1+a>0$ であるから $\boxed{\text{ス}}\geqq 0$ である．

逆に，$\boxed{\text{ス}}\geqq 0$ のとき，①, ②, ③ を満たす実数 $x,\ y,\ z$ があることがわかる．

以上のことから，$\boxed{\text{セ}}$ は，$\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形となる S 上の点 C があるための必要十分条件である．

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

⓪ $1-2a$	① $(1-a)^2$
② $(1+2a)^2$	③ $(1+2a)(1-a)$
④ $(1-2a)(1-a)$	⑤ $(1-2a^2)(1+2a)$
⑥ $(1+2a^2)(1-a)$	⑦ $(1-2a^2)(1-a)$

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

⓪ $-1<a<1$	① $-1<a\leqq\dfrac{1}{2}$	② $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
③ $-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$	④ $-\dfrac{1}{2}\leqq a<1$	⑤ $\dfrac{1}{2}\leqq a<1$

⑥ $-1<a\leqq-\dfrac{1}{2}$ または $\dfrac{1}{2}\leqq a<1$

⑦ $-1<a\leqq-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ または $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqq a<1$

(25 共通テスト 本試験 IIBC 6 旧 IIB 7)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケコ	サ	シ	ス	セ
1	4	0	0	5	3	5	3	10	2	0	3	4

【解答】

(1) S は O を中心とする半径 1 の球面であり，C$(x,\ y,\ z)$ が S 上にあるとき

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=\mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

であるから，これをベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の成分を用いて表すと

$$x^2+y^2+z^2=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

となる．

さらに，△ABC が正三角形であるとき，△OAC，△OAB について

$$\begin{cases}\text{OA は共通辺}\\ \mathrm{OC}=\mathrm{OB}=1\\ \mathrm{AC}=\mathrm{AB}\quad (\because\ \triangle\mathrm{ABC}\ \text{は正三角形})\end{cases}$$

が成り立つから

$$\triangle\mathrm{OAC}\equiv\triangle\mathrm{OAB}$$

である．したがって，対応する角の大きさも等しいから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathbf{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{OB}} \quad \text{イは④} \qquad \cdots\cdots(答)$$

が成り立つ．これをベクトルの成分を用いて表すと

$$(1,\ 0,\ 0)\cdot(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 0)\cdot\left(a,\ \sqrt{1-a^2},\ 0\right)$$

$$x+0+0=a+0+0$$

$$\therefore\quad x=\boldsymbol{a} \qquad \cdots\cdots ② \quad \text{ウは⓪} \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる．同様に △OBC と △OAB も合同であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

が成り立ち，これをベクトルの成分を用いて表すと

$$\left(a,\ \sqrt{1-a^2},\ 0\right)\cdot(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 0)\cdot\left(a,\ \sqrt{1-a^2},\ 0\right)$$

$$ax+\sqrt{1-a^2}y+0=a+0+0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{ax+\sqrt{1-a^2}y=a}\quad \text{エは}⓪,\quad \text{オは}⑤\qquad \cdots\cdots ③\qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる．

逆に，実数 $x,\ y,\ z$ が ①, ②, ③ を満たすとき，$\mathrm{C}(x,\ y,\ z)$ は S 上の点 ($\because$ ①) であり，

$$\begin{aligned}
\mathrm{AB}^2&=(a-1)^2+(\sqrt{1-a^2})^2+0^2\\
&=(a^2-2a+1)+(1-a^2)\\
&=2-2a\\
\mathrm{BC}^2&=(x-a)^2+(y-\sqrt{1-a^2})^2+z^2\\
&=(x^2-2ax+a^2)+(y^2-2\sqrt{1-a^2}y+1-a^2)+z^2\\
&=x^2+y^2+z^2-2(ax+\sqrt{1-a^2}y)+1\\
&=2-2(ax+\sqrt{1-a^2}y)\quad(\because\ ①)\\
&=2-2a\quad(\because\ ③)\\
\mathrm{CA}^2&=(x-1)^2+y^2+z^2\\
&=x^2+y^2+z^2-2x+1\\
&=2-2x\quad(\because\ ①)\\
&=1-2a\quad(\because\ ②)
\end{aligned}$$

が成り立ち，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ であるから，△ABC は正三角形になっていることがわかる．

(2) (i) $a=\dfrac{3}{5}$ のとき，② と ③ を満たす実数 $x,\ y$ は

$$x=a=\boldsymbol{\frac{3}{5}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

$$y=\frac{a-ax}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{\frac{3}{5}-\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}=\frac{\frac{3}{5}-\frac{9}{25}}{\frac{4}{5}}=\frac{15-9}{20}=\boldsymbol{\frac{3}{10}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．この $x,\ y$ に対して，① を満たす実数 z は

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{10}\right)^2+z^2=1$$

$$z^2=1-\frac{9}{25}-\frac{9}{100}=\frac{100-36-9}{100}=\frac{55}{100}$$

$$\therefore\quad z=\pm\frac{\sqrt{55}}{10}$$

として，**ちょうど二つある．**　サは②　　　　……(答)

したがって，△ABC が正三角形となる S 上の点 C はちょうど二つある．

(ii) $a=-\dfrac{3}{5}$ のとき，② と ③ を満たす実数 x, y は

$$x=a=-\frac{3}{5}$$

$$y=\frac{a-ax}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{-\frac{3}{5}-\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{3}{5}\right)}{\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}}=\frac{-\frac{3}{5}-\frac{9}{25}}{\frac{4}{5}}=\frac{-15-9}{20}=-\frac{6}{5}$$

である．$y^2>1$ であり，① を満たす実数 z は存在しない．すなわち，△ABC が正三角形となる S 上の点 C はないことがわかる．　シは0 ……(答)

(3) △ABC が正三角形となる S 上の点 C があるための，a に関する条件を求める．
実数 x, y, z が ①, ②, ③ を満たすならば，

$$x=a \quad (\because\ ②)$$

$$y=\frac{a(1-a)}{\sqrt{1-a^2}} \quad (\because\ ③)$$

であり，① から

$$\begin{aligned}z^2&=1-x^2-y^2\\&=1-a^2-\frac{a^2(1-a)^2}{1-a^2}\\&=\frac{(1-a^2)(1+a)-a^2(1-a)}{1+a}\\&=\frac{1+a-2a^2}{1+a}\\&=\boldsymbol{\frac{(1+2a)(1-a)}{1+a}}\end{aligned}$$

スは3 ……(答)

となる．さらに，$z^2\geqq 0$, $1+a>0$ であるから $(1+2a)(1-a)\geqq 0$ である．

逆に，$(1+2a)(1-a)\geqq 0$，すなわち a が $-\dfrac{1}{2}\leqq a<1$ $(\because\ -1<a<1)$ を満たすならば，①, ②, ③ を満たす x, y, z は

$$x=a$$

$$y=\frac{a-ax}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{a-a^2}{\sqrt{1-a^2}}=a\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$$

$$z^2=1-a^2-a^2\frac{1-a}{1+a}=\frac{(1-a^2)(1+a)-a^2(1-a)}{1+a}=\frac{(1+2a)(1-a)}{1+a}$$

であり，x は実数，$0<1-a\geqq\dfrac{3}{2}$ かつ $\dfrac{1}{2}\leqq 1+a\geqq 2$ より，y も実数，$z^2\geqq 0$ であるから，z も実数である．すなわち，①, ②, ③ を満たす実数 x, y, z があることがわかる．

以上のことから，

$$\boldsymbol{-\frac{1}{2}\leqq a<1}$$

セは4 ……(答)

は，△ABC が正三角形となる S 上の点 C があるための必要十分条件である．