xyz 空間において，原点を通り，ベクトル $\overrightarrow{m}=(-6,\ 2,\ 5)$ に平行な直線 l があり，また，点 $\mathrm{A}(-10,\ 0,\ 14)$，$\mathrm{B}(8,\ -1,\ -3)$ がある．次の問いに答えよ．

(1) 点 A から直線 l に垂線をおろし l との交点を C，同様に点 B から直線 l に垂線をおろし l との交点を D とする．C と D の座標を求めよ．また，ベクトルの大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$ を求めよ．
(2) 4 点 A，B，C，D は同一平面上にないことを示せ．
(3) l 上に動点 P があるとき，線分の長さの和 AP＋BP の最小値と，そのときの点 P の座標を求めよ．

(25 大阪医薬大 医 2)

【答】

(1) $\mathrm{C}(-12,\ 4,\ 10)$，$\mathrm{D}(6,\ -2,\ -5)$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=6$，$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=3$
(2) 略
(3) $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 0)$ のとき，最小値 $3\sqrt{74}$

【解答】

$$l:(x,\ y,\ z)=t\overrightarrow{m}=t(-6,\ 2,\ 5)\quad (t\text{ は実数})$$

(1) C は点 $\mathrm{A}(-10,\ 0,\ 14)$ から直線 l におろした垂線の足であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{m}$$

である．点 C となる t の値を t_{C} とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{m}=0$$
$$\{t_{\mathrm{C}}(-6,\ 2,\ 5)-(-10,\ 0,\ 14)\}\cdot(-6,\ 2,\ 5)=0$$
$$t_{\mathrm{C}}(36+4+25)-(60+0+70)=0$$
$$t_{\mathrm{C}}=\frac{130}{65}=2$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}=2(-6,\ 2,\ 5)=(-12,\ 4,\ 10)$$

であり，C の座標は

$\mathrm{C}\boldsymbol{(-12,\ 4,\ 10)}$ ……(答)

である．また，D は点 $\mathrm{B}(8,\ -1,\ -3)$ から直線 l におろした垂線の足であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}\perp\overrightarrow{m}$$

である．点 D となる t の値を t_{D} とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{m}=0$$
$$\{t_{\mathrm{D}}(-6,\ 2,\ 5)-(8,\ -1,\ -3)\}\cdot(-6,\ 2,\ 5)=0$$
$$t_{\mathrm{D}}(36+4+25)-(-48-2-15)=0$$
$$t_{\mathrm{D}}=-\frac{65}{65}=-1$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OD}}=-(-6,\ 2,\ 5)=(6,\ -2,\ -5)$$

であり，D の座標は

$\mathrm{D}\boldsymbol{(6,\ -2,\ -5)}$ ……(答)

である．したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-12,\ 4,\ 10)-(-10,\ 0,\ 14)=(-2,\ 4,\ -4)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=(6,\ -2,\ -5)-(8,\ -1,\ -3)=(-2,\ -1,\ -2)$$

であり，それぞれの大きさは

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{4+16+16}=\mathbf{6}, \qquad \cdots\cdots(答)$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=\sqrt{4+1+4}=\mathbf{3} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 4 点 A，B，C，D は同一平面上にないことを背理法を用いて示す．

4 点 A，B，C，D は同一平面上にあると仮定する．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(18,\ -1,\ -17)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 4,\ -4)$ はどちらも $\vec{0}$ でなく，平行でないから，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(16,\ -2,\ -19)$ は実数 α, β を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

と表すことができる．

$$(16,\ -2,\ -19)=\alpha(18,\ -1,\ -17)+\beta(-2,\ 4,\ -4)$$

$$\begin{cases} 16=18\alpha-2\beta & \cdots\cdots\ ① \\ -2=-\alpha+4\beta & \cdots\cdots\ ② \\ -19=-17\alpha-4\beta & \cdots\cdots\ ③ \end{cases}$$

①, ② より，$\alpha=\dfrac{6}{7}$, $\beta=-\dfrac{2}{7}$ となるが，これは ③ を満たさないから，$(*)$ を満たす α, β は存在することに反する．

よって，4 点 A，B，C，D は同一平面上にない． ……(証明終わり)

(3) (2) より A は B と l を含む平面 BCD 上にない．A を l を軸として回転させたときの 2 交点のうち，l に関して B と反対側にある交点を A$'$ とおき，直線 A$'$B と l との交点を P_0 とおく．このとき，l 上に動点 P について

$$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=\mathrm{A'P}+\mathrm{BP}\geqq\mathrm{A'P_0}+\mathrm{BP_0}=\mathrm{A'B}$$

が成り立つ．等号が成り立つのは $\mathrm{P}=\mathrm{P}_0$ のときである．このとき

$$\triangle\mathrm{A'CP_0}\ \backsim\ \triangle\mathrm{BDP_0}$$

であり，相似比は

$$\mathrm{A'C}:\mathrm{BD}=6:3=2:1$$

であるから，P_0 は線分 CD を $2:1$ に内分する点である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+2\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{3}=\vec{0} \quad (\because\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=-2\overrightarrow{\mathrm{OD}})$$

であり，P_0 は原点 O である．

$$\mathrm{A'B}=3\mathrm{P_0B}=3\mathrm{OB}=3\sqrt{64+1+9}=3\sqrt{74}$$

である．よって，AP + BP は

P(0, 0, 0) のとき，最小値 $\mathbf{3\sqrt{74}}$ ……(答)

をとる．