

座標空間内の4点 $A(1, 0, -5)$, $B(4, 2, -9)$, $C(-2, 2, -6)$, $D(2, 2, k)$ が同一平面上にあるとき、次の問いに答えよ。ただし、 k は定数である。

- (1) 三角形 ABC の面積 S を求めよ。
- (2) k の値を求めよ。
- (3) 三角形 ABD の面積 S' を求めよ。

(25 東北学院大 文系・情報 B 7)

【答】

$$(1) S = \frac{9}{2}\sqrt{5}$$

$$(2) k = -8$$

$$(3) S' = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

【解答】

$$A(1, 0, -5), B(4, 2, -9), C(-2, 2, -6), D(2, 2, k)$$

- (1) $\overrightarrow{AB} = (3, 2, -4)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, 2, -1)$ であるから、三角形 ABC の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(9+4+16)(9+4+1) - (-9+4+4)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{29 \times 14 - 1} \\ &= \frac{9}{2} \sqrt{5} \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

- (2) \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} は $\vec{0}$ でなく、平行でもないから、4点 A, B, C, D が同一平面上にあるため条件は、実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

と表されることである。

$$(1, 2, k+5) = s(3, 2, -4) + t(-3, 2, -1)$$

$$\begin{cases} 3s - 3t = 1 \\ 2s + 2t = 2 \\ -4s - t = k + 5 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} s - t = \frac{1}{3} \\ s + t = 1 \\ k = -4s - t - 5 \end{cases}$$

$$\therefore s = \frac{2}{3}, t = \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore k = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 5 = -8 \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

- (3) ① より

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

であり、 D は線分 BC を $1:2$ に内分する点である。

よって、

$$S' = \frac{1}{3}S = \frac{3}{2}\sqrt{5} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

