

座標空間内の 4 点  $A(1, 0, -5)$ ,  $B(4, 2, -9)$ ,  $C(-2, 2, -6)$ ,  $D(2, 2, k)$  が同一平面上にあるとき, 次の問い合わせに答えよ. ただし,  $k$  は定数である.

- (1) 三角形 ABC の面積  $S$  を求めよ.
- (2)  $k$  の値を求めよ.
- (3) 三角形 ABD の面積  $S'$  を求めよ.

(25 東北学院大 文系・情報 B 7)

【答】

$$(1) S = \frac{9}{2}\sqrt{5}$$

$$(2) k = -8$$

$$(3) S' = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

【解答】

$A(1, 0, -5)$ ,  $B(4, 2, -9)$ ,  $C(-2, 2, -6)$ ,  $D(2, 2, k)$

(1)  $\vec{AB} = (3, 2, -4)$ ,  $\vec{AC} = (-3, 2, -1)$  であるから, 三角形 ABC の面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(9+4+16)(9+4+1) - (-9+4+4)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{29 \times 14 - 1} \\ &= \frac{9}{2}\sqrt{5} \end{aligned} \quad \dots\dots\text{(答)}$$

である.

(2)  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  は  $\vec{0}$  でなく, 平行でもないから, 4 点 A, B, C, D が同一平面上にあるため条件は, 実数  $s, t$  を用いて

$$\vec{AD} = s\vec{AB} + t\vec{AC}$$

と表されることである.

$$(1, 2, k+5) = s(3, 2, -4) + t(-3, 2, -1)$$

$$\begin{cases} 3s - 3t = 1 \\ 2s + 2t = 2 \\ -4s - t = k + 5 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} s - t = \frac{1}{3} \\ s + t = 1 \\ k = -4s - t - 5 \end{cases}$$

$$\therefore s = \frac{2}{3}, t = \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{①}$$

$$\therefore k = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 5 = -8 \quad \dots\dots\text{(答)}$$

である.

(3) ① より

$$\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$$

であり, D は線分 BC を  $1 : 2$  に内分する点である.

よって,

$$S' = \frac{1}{3}S = \frac{3}{2}\sqrt{5} \quad \dots\dots\text{(答)}$$

である.

