座標空間において，2 点 $\mathrm{A}(2,\ -1,\ 3)$，$\mathrm{B}(3,\ -2,\ 4)$ を通る直線 AB 上の点のうち，原点から最も近いところにある点 P の座標を求めよ．

(25 茨城大 工 4(1))

【答】 $\mathrm{P}(0,\ 1,\ 1)$

【解答】

2 点 $\mathrm{A}(2,\ -1,\ 3)$，$\mathrm{B}(3,\ -2,\ 4)$ を通る直線 AB 上の点を Q とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= (2,\ -1,\ 3) + t\{(3,\ -2,\ 4) - (2,\ -1,\ 3)\} \\ &= (2,\ -1,\ 3) + t(1,\ -1,\ 1)\end{aligned}$$

と表される．

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 &= |(2,\ -1,\ 3) + t(1,\ -1,\ 1)|^2 \\ &= (4+1+9) + 2t(2+1+3) + t^2(1+1+1) \\ &= 3t^2 + 12t + 14 \\ &= 3\,(t+2)^2 + 2\end{aligned}$$

であり，$t=-2$ のとき最小となる．原点から最も近いところにある点が P であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (2,\ -1,\ 3) - 2(1,\ -1,\ 1) = (0,\ 1,\ 1)$$

である．よって，点 P の座標は

$$\mathbf{P(0,\ 1,\ 1)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 原点から最も近いところにあるのは，Q が

  $$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

  を満たすときである．

  $$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \\ &\{(2,\ -1,\ 3) + t(1,\ -1,\ 1)\} \cdot (1,\ -1,\ 1) = 0 \\ &(2+1+3) + t(1+1+1) = 0 \\ \therefore\ \ & t = -\frac{6}{3} = -2\end{aligned}$$

  以下,【解答】と同じ．