空間の 4 点を O，A，B，C とする．$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=\sqrt{13}$, $\mathrm{OB}=5$ とし，内積について，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=13$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=7$ が成り立つとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) AB，AC の長さを求めよ．
(2) 三角形 ABC の面積を求めよ．
(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．
(4) 4 点 O，A，B，C を通る球面の半径を求めよ．

(25 高知大 理工・医 3)

【答】
(1) $\mathrm{AB}=2\sqrt{3}$, $\mathrm{AC}=2\sqrt{3}$
(2) $3\sqrt{3}$
(3) $3\sqrt{3}$
(4) $\dfrac{5}{2}$

【解答】

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=\sqrt{13},\ \mathrm{OB}=5,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=13,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=7$$

(1) 与えられた条件より

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\\&=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\\&=\sqrt{5^2-2\times13+(\sqrt{13})^2}\\&=\boldsymbol{2\sqrt{3}}\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(答)$$

であり

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}&=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\\&=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\\&=\sqrt{(\sqrt{13})^2-2\times7+(\sqrt{13})^2}\\&=\boldsymbol{2\sqrt{3}}\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 与えられた条件において A と C は対称であるから，$\mathrm{CB}=\mathrm{AB}$ であり，(1) の結果もあわせると，$\triangle\mathrm{ABC}$ は 1 辺の長さが $2\sqrt{3}$ の正三角形である．

よって，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2\sin60^\circ=\boldsymbol{3\sqrt{3}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(3) O から平面 ABC に下した垂線の足を H とおく．辺 AC の中点を M とおくと，四面体 OABC は平面 OBM に関して対称であるから，B，M，H は一直線上に並ぶ．

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{13})^2+2\times7+(\sqrt{13})^2}=\sqrt{10},\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BM}}|=\mathrm{AB}\sin60^\circ=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$$

であるから

$$\cos\angle\mathrm{OBM} = \frac{5^2+3^2-(\sqrt{10})^2}{2\times5\times3} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore\quad \sin\angle\mathrm{OBM} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

であり

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \mathrm{OB}\sin\angle\mathrm{OBM} = 5\times\frac{3}{5} = 3$$

である．よって

$$V = \frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \frac{1}{3}\times3\sqrt{3}\times3 = \mathbf{3\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) 辺 OB の中点を N とおくと

$$\mathrm{NO} = \mathrm{NB} = \frac{5}{2}$$

である．また

$$\begin{aligned}\mathrm{NA} &= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{ON}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\\ &= \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2}\\ &= \sqrt{(\sqrt{13})^2-13+\frac{5^2}{4}}\\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

であり，A，C は平面 OBM に関して対称であるから

$$\mathrm{NC} = \frac{5}{2}$$

でもある．よって，4 点 O，A，B，C を通る球面の半径は

$$\mathbf{\frac{5}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 四面体 OABC は平面 OBM すなわち平面 OBH に関して対称であり，4 点 O，A，B，C を通る球面が存在するならば，その中心は平面 OBH 上にあり，$\triangle\mathrm{OBH}$ は $\angle\mathrm{OHB} = 90^\circ$ の直角三角形であるから，辺 OB の中点 N はその球面の中心である．$\mathrm{NO} = \mathrm{NA} = \mathrm{NB} = \mathrm{NC}$ であることを確認すれば 4 点を通る球面の存在が確認される．