$xyz$ 空間において，点 P(1, 0, 1) をとり，$xy$ 平面 $(z=0)$ 上にあり $x$ 座標が 1 ではない点 Q に対し，直線 PQ と $yz$ 平面 $(x=0)$ との交点を R とする．

また，$xy$ 平面 $(z=0)$ 上の連立不等式

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 1 \\ x+y \leqq 0 \end{cases}$$

で表される領域を $D$ とする．

(1) $D$ を $xy$ 平面上に図示せよ．

(2) Q が $(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ $(0<\theta<2\pi)$ のとき，R の座標を求めよ．

(3) Q が領域 $D$ を動くとき，R の動く $yz$ 平面 $(x=0)$ 上の領域を $E$ とする．$E$ を $yz$ 平面上に図示し，その面積を求めよ．

(25 青山学院大 社会情報 C 5)

---

【答】

(1) 略

(2) $\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta},\ -\dfrac{\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)$

(3)

---

【解答】

(1) $D$ は $xy$ 平面 $(z=0)$ 上の連立不等式

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 1 \\ x+y \leqq 0 \end{cases}$$

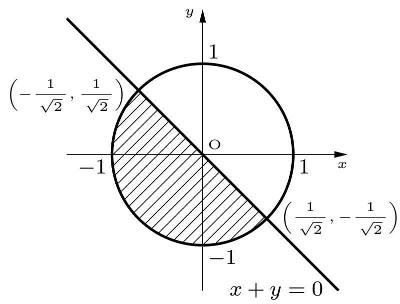
で表される領域である．円 $x^2+y^2=1$ と直線 $x+y=0$ の交点の $x$ 座標は

$$x^2+(-x)^2=1 \qquad \therefore \quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

である．$y=-x$ であるから，交点の座標は

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{(複号同順)}$$

であり，$D$ は右図の斜線部分となる．




(2) P(1, 0, 1)，Q$(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ $(0<\theta<2\pi)$ のとき，直線 PQ 上の点 R は実数 $t$ を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \\ &= (1,\ 0,\ 1)+t(\cos\theta-1,\ \sin\theta,\ -1) \\ &= (1+t(\cos\theta-1),\ t\sin\theta,\ 1-t)\end{aligned}$$

と表すことができる．R は $yz$ 平面 $(x=0)$ 上の点でもあるから

$$1+t(\cos\theta-1)=0$$

$$\therefore \quad t=\frac{1}{1-\cos\theta} \quad (\because\ 0<\theta<2\pi \text{より } 1-\cos\theta \neq 0)$$

である．よって，R の座標は

$$\mathbf{R}\left(\mathbf{0},\ \frac{\sin\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{1-\cos\boldsymbol{\theta}}},\ -\frac{\cos\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{1-\cos\boldsymbol{\theta}}}\right) \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

である．

(3) Q が領域 $D$ を動くとき，Q の座標は実数 $r$, $\theta$ $\left(0 \leqq r \leqq 1,\ \dfrac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{7}{4}\pi\right)$ を用いて

$$\mathrm{Q}(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 0)$$

と表すことができる．このとき R は (2) の $\cos\theta$, $\sin\theta$ を $r\cos\theta$, $r\sin\theta$ とかえることにより

$$\mathrm{R}\left(0,\ \frac{r\sin\theta}{1-r\cos\theta},\ -\frac{r\cos\theta}{1-r\cos\theta}\right)$$

となる．Q が動くときの R の動く $yz$ 平面 $(x=0)$ 上の領域 $E$ は，Q の座標を $(0,\ y,\ z)$ とおくと

$$(*)\begin{cases} 0 \leqq r \leqq 1 & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{7}{4}\pi & \cdots\cdots ② \\ y = \dfrac{r\sin\theta}{1-r\cos\theta} & \cdots\cdots ③ \\ z = -\dfrac{r\cos\theta}{1-r\cos\theta} & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

を満たす $r$, $\theta$ が存在するような点 $(0,\ y,\ z)$ の集合である．

④ より

$$z = 1 - \frac{1}{1-r\cos\theta} \qquad \therefore \quad \frac{1}{1-r\cos\theta} = 1-z$$

であり

$$「③ かつ ④」 \iff \begin{cases} \dfrac{1}{1-r\cos\theta} = 1-z \\ y = r\sin\theta\cdot(1-z) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r\cos\theta = 1 - \dfrac{1}{1-z} = -\dfrac{z}{1-z} \\ r\sin\theta = \dfrac{y}{1-z} \end{cases}$$

である．また，$(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ が「① かつ ②」を満たすための条件は

$$\begin{cases} (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 \leqq 1 \\ r\cos\theta + r\sin\theta \leqq 0 \end{cases}$$

であるから，$(*)$ を満たす $r$, $\theta$ が存在するための $y$, $z$ の条件は

$$\begin{cases} \left(-\dfrac{z}{1-z}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{1-z}\right)^2 \leqq 1 \\ -\dfrac{z}{1-z} + \dfrac{y}{1-z} \leqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1-z \neq 0 \\ z^2 + y^2 \leqq (1-z)^2 \\ (1-z)(-z+y) \leqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z \neq 1 \\ z \leqq \dfrac{1-y^2}{2} \\ (z-1)(z-y) \leqq 0 \end{cases}$$

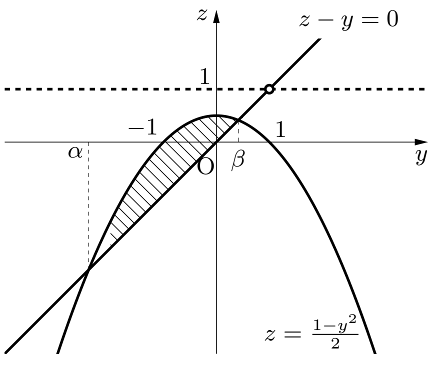
である．放物線 $z = \dfrac{1-y^2}{2}$ と直線 $z-y=0$ の共有点の $y$ 座標は

$$\frac{1-y^2}{2} = y$$

$$y^2 + 2y - 1 = 0$$

$$\therefore \quad y = -1 \pm \sqrt{2}$$

であり，$\alpha = -1-\sqrt{2}$, $\beta = -1+\sqrt{2}$ とおくと，R の動く $yz$ 平面 $(x=0)$ 上の領域 $E$ は右図の斜線部分となる．



面積 $S$ は

$$\begin{aligned}
S &= \int_\alpha^\beta \left( \frac{1-y^2}{2} - y \right) dy \\
&= -\frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (y-\alpha)(y-\beta)\, dy \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{(\beta-\alpha)^3}{6} \\
&= \frac{(2\sqrt{2})^3}{12} \\
&= \boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である.