点 O を原点とする xyz 空間内に，点 A(8, 0, 0) と 2 点 B，C がある．点 B は xy 平面上の $x>0,\ y>0$ の部分にあり，点 C の z 座標は正であるとする．さらに，

$$\mathrm{OB}=5\sqrt{2},\quad \mathrm{AB}=7\sqrt{2},\quad \angle\mathrm{COA}=\frac{\pi}{3},\quad \angle\mathrm{COB}=\frac{\pi}{4}$$

であるとし，点 C から xy 平面に下ろした垂線と xy 平面との交点を H とする．

(1) 点 B の座標は $\left(\boxed{44},\ \boxed{45},\ 0\right)$ である．

(2) 点 H の x 座標を a とするとき，点 H の y 座標は $\dfrac{\boxed{46}}{\boxed{47}}a$ である．

(3) 点 H が 2 点 A，B を通る直線上にあるのは，$\mathrm{OC}=\boxed{48}$ のときである．このとき，点 C の座標は $\left(\dfrac{\boxed{49}}{\boxed{50}},\ \dfrac{\boxed{51}}{\boxed{52}},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{53}\boxed{54}}}{\boxed{55}}\right)$ である．

(25 青山学院大 全学部 理系 4)

【答】

44	45	46	47	48	49	50	51	52	5354	55
1	7	9	7	7	7	2	9	2	66	2

【解答】

(1) B は xy 平面上の点であるから，B の座標を $(b_1,\ b_2,\ 0)$ とおくことにする．

$$\mathrm{A}(8,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{OB}=5\sqrt{2},\quad \mathrm{AB}=7\sqrt{2}$$

であるから

$$\begin{cases} {b_1}^2+{b_2}^2=50 \\ (b_1-8)^2+{b_2}^2=98 \end{cases} \iff \begin{cases} {b_2}^2=50-{b_1}^2 \\ (b_1-8)^2+(50-{b_1}^2)=98 \end{cases}$$

第 2 式を解くと

$$-16b_1+64+50=98 \qquad \therefore\quad b_1=1$$

であり，これを第 1 式に代入して

$$b_2=\pm 7$$

を得る．点 B の y 座標は正であるから　$b_2=7$ であり

$$\mathrm{B}(\mathbf{1},\ \mathbf{7},\ 0) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) H は C から xy 平面に下ろした垂線と xy 平面との交点であるから，H の座標を $(a,\ b,\ 0)$ とすると，C の座標は $(a,\ b,\ c)$ とおくことができる．ただし，C の z 座標は正であるから $c>0$ である．

$$\angle\mathrm{COA}=\frac{\pi}{3},\quad \angle\mathrm{COB}=\frac{\pi}{4}$$

であるから

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{COA} \\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{COB} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8a=8\times\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times\dfrac{1}{2} \\ a+7b=\sqrt{50}\times\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a=\sqrt{a^2+b^2+c^2} & \cdots\cdots ① \\ a+7b=5\sqrt{a^2+b^2+c^2} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① を ② に代入すると，H の y 座標 b は

$$a+7b=5\times 2a \qquad \therefore \quad b=\mathbf{\frac{9}{7}}a \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) xy 平面上において直線 AB の方程式は

$$y=\frac{0-7}{8-1}(x-8) \qquad \therefore \quad x+y=8$$

である．H$\left(a,\ \dfrac{9}{7}a,\ 0\right)$ が 2 点 A，B を通る直線上にあるのは

$$a+\frac{9}{7}a=8 \qquad \therefore \quad a=\frac{7}{2}$$

のときであり，① より

$$\mathrm{OC}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=2a=2\times\frac{7}{2}=\mathbf{7} \qquad \cdots\cdots(答)$$

のときである．このとき

$$a^2+b^2+c^2=7^2$$
$$\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{7}\times\frac{7}{2}\right)^2+c^2=49$$
$$c^2=49-\frac{49+81}{4}=49-\frac{65}{2}=\frac{33}{2}$$

C の z 座標は正であるから，C の座標は

$$\mathrm{C}\left(\mathbf{\frac{7}{2}},\ \mathbf{\frac{9}{2}},\ \mathbf{\frac{\sqrt{66}}{2}}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．