定数 a を $a \fallingdotseq 1$ とするとき，x についての連立不等式

$$\begin{cases} x - \sqrt{6}a + 1 \geqq 0 & \cdots\cdots ① \\ (a-1)x - 2a^2 - a + 3 \leqq 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

の解について考える．なお，$\sqrt{6} = 2.449\cdots$ である．

(1) $a = 2$ のとき，連立不等式の解は

$$\boxed{\text{ア}}\sqrt{6} - \boxed{\text{イ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ウ}}$$

である．

(2) 不等式 ① の解は $x \geqq \boxed{\text{エ}}$ である．

一方，不等式 ② は

$$(a-1)\left\{x - \left(\boxed{\text{オ}}\right)\right\} \leqq 0$$

と変形できる．$a-1$ が正の場合と負の場合に分けて，連立不等式の解を求める．

- $a - 1 > 0$ のときを考える．
  不等式 ② の解は $x \leqq \boxed{\text{カ}}$ となり，連立不等式を満たす実数 x があるための必要十分条件は

  $$1 < a \leqq \boxed{\text{キ}}\sqrt{6} + \boxed{\text{ク}}$$

  である．このときの連立不等式の解は $\boxed{\text{エ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{カ}}$ である．
- $a - 1 < 0$ のときを考える．
  連立不等式の解は $x \geqq \boxed{\text{ケ}}$ である．

$\boxed{\text{エ}}$ ～ $\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい．)

⓪ $\sqrt{6}a + 1$	① $\sqrt{6}a - 1$	② $-\sqrt{6}a + 1$
③ $-\sqrt{6}a - 1$	④ $2a + 3$	⑤ $2a - 3$
⑥ $-2a + 3$	⑦ $-2a - 3$	

(3) a を整数とするとき，連立不等式を満たす x で，x が整数となるものが一つだけであるような a の値を求める．

(2) から，$a - 1 < 0$ のときは，連立不等式を満たす整数が二つ以上あることがわかる．したがって，$a - 1 > 0$ のときだけを考えればよい．

a が整数のときは $\boxed{\text{カ}}$ も整数になる．このことに注意して a の値をすべて求めると，$a = \boxed{\text{コ}}$ である．

このとき，連立不等式を満たすただ一つの整数は，求めた a の値を $\boxed{\text{カ}}$ に代入したものである．

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ 6，7	① 7，8	② 8，9
③ 5，6，7	④ 6，7，8	⑤ 7，8，9

(26 共通テスト 本試験 I 第 1 問〔1〕)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
2	1	7	1	4	4	2	4	4	1

【解答】

$$a \fallingdotseq 1$$

$$(*)\begin{cases} x-\sqrt{6}a+1 \geqq 0 & \cdots\cdots ① \\ (a-1)x-2a^2-a+3 \leqq 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

(1) $a=2$ のとき，連立不等式 $(*)$ は

$$\begin{cases} x-2\sqrt{6}+1 \geqq 0 \\ x-7 \leqq 0 \end{cases}$$

であり，解は

$$\mathbf{2}\sqrt{6}-\mathbf{1} \leqq x \leqq \mathbf{7} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 不等式 ① の解は

$$x \geqq \boldsymbol{\sqrt{6}a-1} \quad ① \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

一方，不等式 ② は

$$(a-1)x-(a-1)(2a+3) \leqq 0$$

$$\therefore\ (a-1)\{x-(\boldsymbol{2a+3})\} \leqq 0 \quad \cdots\cdots ②' \quad ④ \qquad \cdots\cdots(答)$$

と変形できる．

- $a-1>0$ のとき

  $$②' \iff x-(2a+3) \leqq 0$$

  であるから，不等式 ② の解は

  $$x \leqq \boldsymbol{2a+3} \quad ④ \qquad \cdots\cdots(答)$$

  となる．連立不等式 $(*)$ を満たす実数 x があるための必要十分条件は

  $$\sqrt{6}a-1 \leqq 2a+3$$
  $$(\sqrt{6}-2)a \leqq 4$$
  $$\therefore\ a \leqq \frac{4}{\sqrt{6}-2} = 2(\sqrt{6}-2)$$

  であり，$a>1$ もあわせると

  $$1 < a \leqq \mathbf{2}\sqrt{6}+\mathbf{4} \qquad \cdots\cdots(答)$$

  である．このときの連立不等式 $(*)$ の解は

  $$\sqrt{6}a-1 \leqq x \leqq 2a+3$$

  である．

- $a-1<0$ のとき

  $$②' \iff x-(2a+3) \geqq 0$$

  であるから，不等式 ② の解は

  $$x \geqq 2a+3$$

となる．$\sqrt{6}a-1$ と $2a+3$ の大小を比較すると

$$\begin{aligned}(\sqrt{6}a-1)-(2a+3) &= (\sqrt{6}-2)a-4 \\ &< (\sqrt{6}-2)\cdot 1-4 \quad (\because\ \sqrt{6}-2>0) \\ &= \sqrt{6}-6 \\ &< 0\end{aligned}$$

であり，$\sqrt{6}a-1<2a+3$ であるから，連立不等式 $(*)$ の解は

$$x \geqq \boldsymbol{2a+3} \qquad ④ \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) a を整数とするとき，連立不等式 $(*)$ の解 x で x が整数となるものが一つだけ存在するためには $a-1>0$ であることが必要であり，(2) の前半の議論により，このときの解は

$$\sqrt{6}a-1 \leqq x \leqq 2a+3 \quad (1<a \leqq 2\sqrt{6}+4)$$

である．a が整数のとき $2a+3$ も整数であり，$x=2a+3$ がただ一つの整数解になることに注意すると，求める a の条件は

$$\begin{aligned}&(2a+3)-1<\sqrt{6}a-1<2a+3 \\ &3<(\sqrt{6}-2)a<4 \\ &\frac{3}{\sqrt{6}-2}<a<\frac{4}{\sqrt{6}-2} \\ \therefore\quad &\frac{3}{2}(\sqrt{6}+2)<a<2(\sqrt{6}+2)\end{aligned}$$

$\sqrt{6}=2.449\cdots$ であり

$$6.673\cdots<a<8.898\cdots$$

である．これを満たす整数 a は

$$a=\mathbf{7,\ 8} \qquad ① \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．