

不等式 $|x-1| < x^2+x+1$ を満たす実数 x の範囲は ウ である。

(26 立教大 文系 2月6日 1(3))

【答】

ウ
$x < -2$ または $0 < x$

【解答】

$$|x-1| < x^2+x+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $x \leq 1$ のとき, $\textcircled{1}$ は

$$-(x-1) < x^2+x+1$$

$$x^2+2x > 0$$

$$x(x+2) > 0$$

x の範囲に注意すると

$$x < -2 \text{ または } 0 < x \leq 1$$

である。

(ii) $x \geq 1$ のとき, $\textcircled{1}$ は

$$x-1 < x^2+x+1$$

$$x^2+2 > 0$$

これはつねに成立するから, x の範囲に注意すると

$$x \geq 1$$

である。

(i), (ii) より, 求める x の範囲は

$$x < -2 \text{ または } 0 < x$$

……(答)

である。

- $|X| < A \iff -A < X < A$
を利用して絶対値をはずしてもよい。

$$\textcircled{1} \iff -(x^2+x+1) < x-1 < x^2+x+1$$

$$\iff \begin{cases} x^2+2x > 0 \\ x^2+2 > 0 \end{cases} \text{ (これはつねに成立)}$$

$$\iff x(x+2) > 0$$

$$\therefore x < -2 \text{ または } 0 < x$$

である。

- $|x-1| = x^2+x+1$ の解は
 $x \leq 1$ のとき $x = -2, 0$
 $x \geq 1$ のとき 解なし

であり, $y = |x-1|$ と $y = x^2+x+1$ のグラフは右図となるから, $\textcircled{1}$ を満たす x の範囲は

$$x < -2 \text{ または } 0 < x$$

である。

