2 次関数のグラフについて考えよう．

(1) 2 次関数 $y = 3x^2$ のグラフを C とする．C を平行移動したグラフが x 軸と異なる 2 点で交わる場合を考える．この二つの交点を結ぶ線分の長さや，平行移動したグラフの頂点と x 軸との距離について考えよう．

(i) C を y 軸方向に -3 だけ平行移動したグラフを C_1 とし，C_1 と x 軸との二つの交点を A_1，B_1 とする．線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ の長さを W_1 とおき，C_1 の頂点と x 軸との距離を H_1 とおくと，$W_1 =$ ア であり，$H_1 =$ イ である．

また，C_1 を x 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフを C_2 とし，C_2 と x 軸との二つの交点を A_2，B_2 とする．線分 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$ の長さを W_2 とおき，C_2 の頂点と x 軸との距離を H_2 とおく．このとき，W_2 と W_1．H_2 と H_1 のそれぞれの大小関係は

W_2 ウ W_1，　H_2 エ H_1

である．

ウ，エ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい．)

⓪ $<$	① $=$	② $>$

(ii) k を負の定数とする．C を x 軸方向に 2，y 軸方向に k だけ平行移動したグラフを C_3 とし，C_3 と x 軸との二つの交点を A_3，B_3 とする．ただし，二つの交点のうち，x 座標の大きい方を B_3 とする．線分 $\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3$ の長さを W_3 とおき，C_3 の頂点と x 軸との距離を H_3 とおく．このとき，W_3 が ア の 4 倍となる場合を考える．

C_3 の軸は直線 $x =$ オ であり，A_3 と B_3 は C_3 の軸に関して対称であることに注意すると，B_3 の座標は (カ ，0) であることがわかる．さらに，B_3 は C_3 上にあるから，$k = -$ キク であることがわかる．これにより，H_3 を求めることができる．

(2) a を正の定数，p，q を定数とする．2 次関数

$$y = a(x-p)^2 + q \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える．① のグラフは 2 次関数 $y = ax^2$ のグラフを平行移動したグラフである．① のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるとし，その二つの交点を A，B とする．ただし，二つの交点のうち，x 座標の大きい方を B とする．線分 AB の長さを W とおき，① のグラフの頂点と x 軸との距離を H とおく．W と H の関係を考えよう．

q を H を用いて表すと，$q =$ ケ であり，B の座標を p と W を用いて表すと，(コ ，0) である．これらのことから，H を a と W を用いて表すと

$$H = \text{サ} \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．

ケ の解答群

⓪ $-2H$	① $-H$	② $-\frac{1}{2}H$
③ $2H$	④ H	⑤ $\frac{1}{2}H$

コ の解答群

⓪ $p-W$	① $p-\frac{1}{2}W$	② $p-\frac{1}{4}W$
③ $p+W$	④ $p+\frac{1}{2}W$	⑤ $p+\frac{1}{4}W$

サ の解答群

⓪ aW	① $\frac{a}{2}W$	② $\frac{a}{4}W$
③ aW^2	④ $\frac{a}{2}W^2$	⑤ $\frac{a}{4}W^2$

(3) t を定数とする．2 次関数

$$y=2x^2-4tx+2t^2-3t+1 \qquad \cdots\cdots \text{③}$$

を考える．③ のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるとし，その二つの交点を A，B とする．線分 AB の長さを W とおき，③ のグラフの頂点と x 軸との距離を H とおく．このとき，$2<W<4$ を満たすような定数 t の値の範囲を求めよう．

② を利用すると，$2<W<4$ のときの H のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{シ}}<H<\boxed{\text{ス}}$$

であることがわかる．よって，t のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{セ}}<t<\boxed{\text{ソ}}$$

である．

(26 共通テスト 本試験 I 第 3 問〔1〕)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
2	3	1	1	2	6	48	1	4	5	2	8	1	3

【解答】

$$C: y=3x^2$$

(1) (i) C_1 は C を y 軸方向に -3 だけ平行移動したものであるから

$$C_1: y=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

である．C_1 と x 軸との交点 A_1，B_1 を結ぶ線分 A_1B_1 の長さ W_1 は

$$W_1=1-(-1)=\mathbf{2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり，C_1 の頂点 $(0,\ -3)$ と x 軸との距離 H_1 は

$$H_1=\mathbf{3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

また，C_2 は C_1 を x 軸方向に 2 だけ平行移動したものであるから，解の幅，および頂点と x 軸との距離は不変であり

$$W_2 = W_1,\ H_2 = H_1 \qquad ①,\ ① \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(ii) C_3 は C を x 軸方向に 2，y 軸方向に $k\ (<0)$ だけ平行移動したものであるから

$$C_3 : y = 3(x-2)^2 + k$$

である．C_3 の軸は

直線 $x = \mathbf{2}$ ……(答)

であり A_3 と B_3 は C_3 の軸に関して対称であることに注意すると，$W_3 = 4W_1$ となるときの B_3 の x 座標は

$$2 + 1 \times 4 = 6$$

であり，

B_3の座標は $(\mathbf{6},\ 0)$ ……(答)

であることがわかる．さらに，B_3 は C_3 上にあるから，

$$0 = 3(6-2)^2 + k$$

$$\therefore\quad k = \mathbf{-48} \qquad \cdots\cdots(答)$$

であることがわかる．これより $H_3 = 48$ である．

(2) $$y = a(x-p)^2 + q \quad (a > 0) \qquad \cdots\cdots ①$$

① のグラフは下に凸で x 軸と異なる 2 点で交わるから

$$q < 0$$

である．① のグラフの頂点と x 軸との距離 H は

$$H = -q, \qquad \therefore\quad q = \boldsymbol{-H} \qquad ① \qquad \cdots\cdots(答)$$

であり，① のグラフと x 軸は異なる二つの点 A，B で交わり，x 座標の大きい方の点が B である．B の座標は

$$\mathrm{B}\left(\boldsymbol{p + \frac{W}{2}},\ 0\right) \qquad ④ \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．A の座標は $\left(p - \dfrac{W}{2},\ 0\right)$ であり，① は

$$y = a\left(x - p + \frac{W}{2}\right)\left(x - p - \frac{W}{2}\right)$$

となるから

$$H = -a \cdot \frac{W}{2} \cdot \left(-\frac{W}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{a}{4}W^2} \qquad ⑤ \qquad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $$y = 2x^2 - 4tx + 2t^2 - 3t + 1 \qquad \cdots\cdots ③$$

$a = 2$ とし ② を利用すると，$2 < W < 4$ のときの H のとり得る値の範囲は

$$\frac{2}{4} \cdot 2^2 < H < \frac{2}{4} \cdot 4^2$$

$$\therefore\quad \mathbf{2} < H < \mathbf{8} \qquad \cdots\cdots(答)$$

であることがわかる．③ は

$$y = 2(x-t)^2 - 3t + 1$$

と変形され，$H = 3t - 1$ であるから，t のとり得る値の範囲は

$$2 < 3t - 1 < 8$$

$$\therefore\quad \mathbf{1} < t < \mathbf{3} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．