全体集合 U を 2 以上 20 以下の自然数全体の集合とする．すなわち

$$U = \{2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 20\}$$

である．

2 以上 9 以下の自然数 a, b に対して，U の部分集合 A, B を

$$A = \{k \mid k \in U,\ k \text{ と } a \text{ は 1 以外の正の公約数をもつ}\}$$
$$B = \{k \mid k \in U,\ k \text{ と } b \text{ は 1 以外の正の公約数をもつ}\}$$

とする．

例えば

$a = 7$ のとき，$A = \{7,\ 14\}$

$a = 9$ のとき，$A = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$

である．

(1) $a = 3$ のとき，$A = \boxed{\text{ア}}$，$b = 4$ のとき，$B = \boxed{\text{イ}}$ である．このとき

$$A \cap B = \boxed{\text{ウ}},\qquad A \cap \overline{B} = \boxed{\text{エ}}$$

である．

$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい．)

⓪ $\{12\}$
① $\{3,\ 9\}$
② $\{3,\ 9,\ 15\}$
③ $\{6,\ 12,\ 18\}$
④ $\{3,\ 6,\ 9,\ 15,\ 18\}$
⑤ $\{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20\}$
⑥ $\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$
⑦ $\{2,\ 4,\ 8,\ 10,\ 14,\ 16,\ 20\}$
⑧ $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$
⑨ $\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18,\ 20\}$

(2) a, b が 2 以上 9 以下の自然数であることに注意して，a, b について考えよう．

(i) $\overline{A}$ の要素に，2 の倍数も 3 の倍数もないとき

$$a = \boxed{\text{オ}}$$

である．

(ii) $A \cap \overline{B} = \{5\}$ であるとき

$$a = \boxed{\text{カ}},\quad b = \boxed{\text{キ}}$$

である．

(26 共通テスト 本試験 I・A〔1〕，I〔2〕)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
6	8	3	2	6	5	6

【解答】

$$U=\{2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 20\}$$

2 以上 9 以下の自然数 $a,\ b$ に対する U の部分集合

$$A=\{k\,|\,k\in U,\ k \text{ と } a \text{ は 1 以外の正の公約数をもつ}\}$$
$$B=\{k\,|\,k\in U,\ k \text{ と } b \text{ は 1 以外の正の公約数をもつ}\}$$

をそれぞれ $A_a,\ B_b$ と表すことにする．

(1) $a=3$ のときの A は A_3 であり，A_3 は 3 と互いに素でない k ならなる U の部分集合である．3 は素数であるから，それは 3 の倍数からなる集合であり

$$A=A_3=\mathbf{\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}}\quad ⑥ \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

$b=4$ のときの B は B_4 であり，B_4 は 4 と互いに素でない k からなる U の部分集合である．$4=2^2$ であるから，それは 4 の約数 2 の倍数からなる集合であり

$$B=B_4=\mathbf{\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}}\quad ⑧ \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．このとき

$$A\cap B=A_3\cap B_4=\mathbf{\{6,\ 12,\ 18\}}\quad ③ \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．また，$\overline{B_4}$ は 奇数からなる U の部分集合であるから

$$A\cap\overline{B}=A_3\cap\overline{B_4}=\mathbf{\{3,\ 9,\ 15\}}\quad ② \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (i) $\overline{A}$ の要素に，2 の倍数も 3 の倍数もないということは 2 の倍数と 3 の倍数はすべて A の要素であるということである．2，3 を約数にもつ自然数は 6 であり，A_6 は条件を満たす．

a が 2 以上 9 以下の自然数であることに注意すると

$$A_2=A_4=A_8=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$$
$$A_3=A_9=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$$
$$A_5=\{5,\ 10,\ 15,\ 20\}$$
$$A_6=\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18,\ 20\}$$
$$A_7=\{7,\ 14\}$$

であり，条件を満たすのは A_6 のみである．よって

$$a=\mathbf{6} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(ii) $A\cap\overline{B}=\{5\}$ であるためには

$$5\in A \text{ かつ } 5\in\overline{B}$$

であることが必要である．(i) の考察より $5\in A$ を満たすのは A_5 のみであり

$$a=\mathbf{5} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．このとき $A_5\cap\overline{B}=\{5\}$ を満たすには $10,\ 15,\ 20\notin\overline{B}$ であること，すなわち，$10,\ 15,\ 20\in B$ であることが必要である．

$b=a$ のとき $B_b=A_a$ であり，(i) の考察により $10,\ 15,\ 20\in B$ を満たすのは $B_5,\ B_6$ である．

$$A_5\cap\overline{B_5}=A_5\cap\overline{A_5}=\emptyset$$
$$A_5\cap\overline{B_6}=\{5\}$$

であり，条件を満たす b の値は

$$b=\mathbf{6} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．