以下の問いに答えよ．

(1) $a^2+2b^2=c^2$ を満たす正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ を 1 つ求めよ．なお，解答は答えのみでよい．

(2) $a^2+2b^2=c^2$ を満たす正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ は無数に存在することを示せ．

(3) 正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ は $a^2+2b^2=c^2$ を満たすとする．このとき，$a+c$ および b は偶数であることを示せ．さらに，もし a と c が偶数ならば b は 4 の倍数であることを示せ．

(26 東北大 理 2 文 2)

【答】

(1) $(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 3)$

(2) 略

(3) 略

【解答】

$$a^2+2b^2=c^2 \qquad \cdots\cdots (*)$$

(1) $\boldsymbol{(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 3)}$ ……(答)

(2) 任意の正の整数 k に対し $(a,\ b,\ c)=(k,\ 2k,\ 3k)$ は $(*)$ を満たすから，$(*)$ を満たす正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ は無数に存在する． …… (証明終わり)

(3)
$$(*) \iff 2b^2=(c+a)(c-a) \qquad \cdots\cdots ①$$

ここで

$$(c+a)+(c-a)=2c\ (=(\text{偶数}))$$

であり，$c+a$ と $c-a$ の偶奇は一致する．① の左辺は偶数であるから，$c+a$ と $c-a$ はともに偶数である．このとき

$2b^2=(\text{偶数})\times(\text{偶数})$ であり，b^2は偶数，すなわち b は偶数

である．以上より $a+c$ および b は偶数である． …… (証明終わり)

さらに，a と c が偶数ならば，$a=2A,\ c=2C$ ($A,\ C$ は正の整数) とおくことができ，前半の議論より b も偶数なので，$b=2B$ (B は正の整数) とおくことができる．このとき

$$(*) \iff 4A^2+8B^2=4C^2$$
$$\therefore\quad A^2+2B^2=C^2$$

前半の議論より B は偶数である．すなわち，b は 4 の倍数である． …… (証明終わり)