z を 0 でない複素数とし，$w = z + \dfrac{1}{z}$ とする．また，r を正の実数とし，複素数平面上で，原点 O を中心とする半径 r の円を C とする．

(1) $z = \sqrt{3} + i$ のとき，$|z| = \boxed{ア}$ であり

$$w = \frac{\boxed{イ}\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}} + \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}i$$

である．

(2) z が C 上を動くとき，w が複素数平面上で描く図形を考える．
実数 θ を z の偏角とし，極形式を用いて $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と表す．

(i) $w = z + \dfrac{1}{z}$ を r, θ を用いて表すと

$$w = \boxed{キ} + i\boxed{ク} \qquad \cdots\cdots ①$$

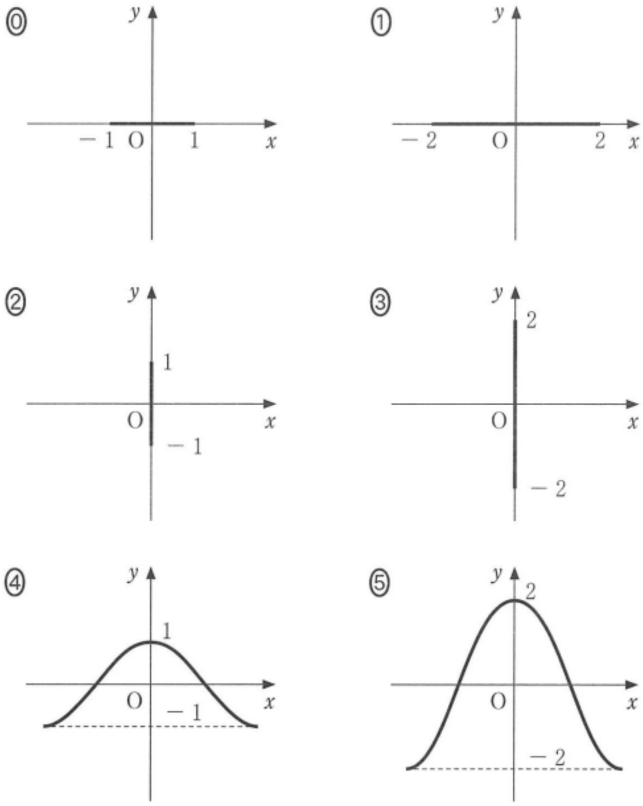
である．したがって，θ の値によらず $\boxed{ク} = 0$ となるような r の値は $\boxed{ケ}$ である．

$\boxed{キ}$，$\boxed{ク}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい．)

⓪ $2r\cos\theta$	① $2r\sin\theta$
② $(r+1)\cos\theta$	③ $(r+1)\sin\theta$
④ $(r-1)\cos\theta$	⑤ $(r-1)\sin\theta$
⑥ $\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta$	⑦ $\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$
⑧ $\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta$	⑨ $\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$

(ii) $r = \boxed{ケ}$ とする．z が C 上を動くとき，w が描く図形は $\boxed{コ}$ である．

$\boxed{コ}$ については，最も適当なものを，次の ⓪〜⑤ のうちから一つ選べ．



(iii) $r \fallingdotseq$ [ケ] とする．x，y を実数として $w = x + yi$ とおくと，① から

$$x = \boxed{\text{キ}}, \quad y = \boxed{\text{ク}} \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．② の二つの式から θ を消去すると，x，y は [サ] を満たし，z が C 上を動くとき，$w = x + yi$ は [サ] の表す図形を描く．

[サ] の解答群

⓪ $\dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = 1$

① $\dfrac{x^2}{r^2} - \dfrac{y^2}{r^2} = 1$

② $\dfrac{x^2}{\left(r + \dfrac{1}{r}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(r - \dfrac{1}{r}\right)^2} = 1$

③ $\dfrac{x^2}{\left(r + \dfrac{1}{r}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(r - \dfrac{1}{r}\right)^2} = 1$

④ $\dfrac{x^2}{\left(r - \dfrac{1}{r}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(r + \dfrac{1}{r}\right)^2} = 1$

⑤ $\dfrac{x^2}{\left(r - \dfrac{1}{r}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(r + \dfrac{1}{r}\right)^2} = 1$

(3) $r \fallingdotseq$ $\boxed{\text{ケ}}$ とする．z が C 上を動くとき，w^2 が描く図形を考えよう．

(i) w^2 を z を用いて表すと，$w^2 =$ $\boxed{\text{シ}}$ である．

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

⓪ $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$	① $z^2 + \dfrac{1}{z^2} + 1$	② $z^2 + \dfrac{1}{z^2} - 1$
③ $z^2 + \dfrac{1}{z^2} + 2$	④ $z^2 + \dfrac{1}{2^2} - 2$	⑤ $z^2 + \dfrac{1}{z^2} + 2i$

(ii) z が C 上を動くとき，$z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ が描く図形の方程式を考える．このとき，z^2 は原点 O を中心とする半径 r^2 の円を描く．このことから，X, Y を実数として $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = X + Yi$ とおくと，X, Y は $\boxed{\text{ス}}$ を満たす．以上を踏まえると，w^2 が描く図形は $\boxed{\text{セ}}$ であることがわかる．

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{X}{r^2 + \dfrac{1}{r^2}} + \dfrac{Y}{r^2 - \dfrac{1}{r^2}} = 1$

① $\dfrac{X^2}{r^4} + \dfrac{Y^2}{r^4} = 1$

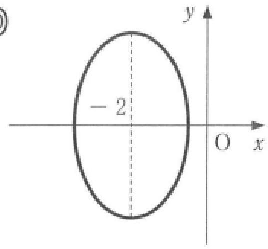
② $\dfrac{X^2}{\left(r^2 + \dfrac{1}{r^2}\right)^2} + \dfrac{Y^2}{\left(r^2 - \dfrac{1}{r^2}\right)^2} = 1$

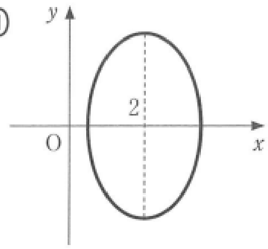
③ $\dfrac{X^2}{\left(r^2 + \dfrac{1}{r^2}\right)^2} - \dfrac{Y^2}{\left(r^2 - \dfrac{1}{r^2}\right)^2} = 1$

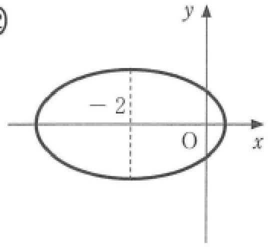
④ $\dfrac{X^2}{\left(r^2 - \dfrac{1}{r^2}\right)^2} + \dfrac{Y^2}{\left(r^2 + \dfrac{1}{r^2}\right)^2} = 1$

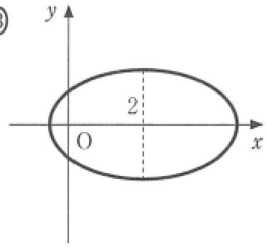
⑤ $\dfrac{X^2}{\left(r^2 - \dfrac{1}{r^2}\right)^2} - \dfrac{Y^2}{\left(r^2 + \dfrac{1}{r^2}\right)^2} = 1$

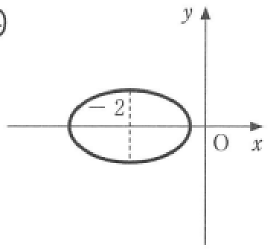
$\boxed{\text{セ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪〜⑦ のうちから一つ選べ．

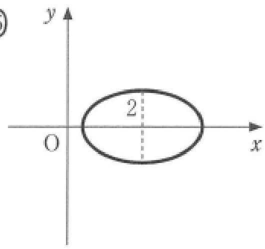
⓪


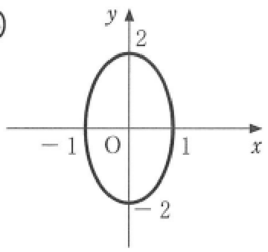
①


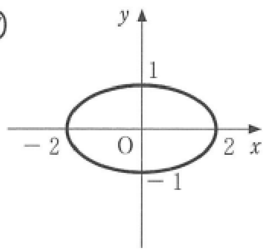
②


③


④


⑤


⑥


⑦


(26 共通テスト 本試験 IIBC 第 7 問)

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
【答】	2	5	3	4	3	4	6	9	1	1	2	3	2	3

【解答】

(1) $z=\sqrt{3}+i$ のとき

$$|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\mathbf{2}$$ ……(答)

であり

$$
\begin{aligned}
w = z + \frac{1}{z} &= (\sqrt{3}+i) + \frac{1}{\sqrt{3}+i} \\
&= \sqrt{3}+i+\frac{\sqrt{3}-i}{3+1} \\
&= \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{4}} + \boldsymbol{\frac{3}{4}}\,i
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots(答)
$$

である．

(2) (i) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と表すとき

$$
\begin{aligned}
w &= z + \frac{1}{z} \\
&= r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\} \\
&= \boldsymbol{\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta} + i\boldsymbol{\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta} \qquad \cdots\cdots ① \qquad 6,\ 9
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots(答)
$$

である．したがって，θ の値によらず $\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta = 0$ となるような r の値は

$$
\begin{aligned}
r - \frac{1}{r} &= 0 \\
\frac{r^2-1}{r} &= 0
\end{aligned}
$$

r は 0 でない複素数 z の絶対値であるから $r>0$ であり

$$
r = \boldsymbol{1} \qquad \cdots\cdots(答)
$$

である．

(ii) $r=1$ のとき，① より

$$
w = 2\cos\theta
$$

となる．θ が動くと

$$
-2 \leqq 2\cos\theta \leqq 2
$$

であり，w が描く図形は

2 点 $-2,\ 2$ を結ぶ線分　1

である．

(iii) $r \fallingdotseq 1$ とする．$x,\ y$ を実数として $w = x+yi$ とおくと

$$
① \iff \begin{cases} x = \left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta \\ y = \left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta \end{cases} \qquad \cdots\cdots ②
$$

が成り立つ．② の二つの式から θ を消去すると，$x,\ y$ は

$$
\boldsymbol{\frac{x^2}{\left(r+\frac{1}{r}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(r-\frac{1}{r}\right)^2} = 1} \qquad \cdots\cdots ③ \qquad 2 \qquad \cdots\cdots(答)
$$

を満たし，z が C 上を動くとき，$w = x+yi$ は ③ の表す図形を描く．

(3) $r \fallingdotseq 1$ のときを考える．

(i) w^2 を z を用いて表すと

$$
\begin{aligned}
w^2 &= \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 \\
&= z^2 + 2\cdot z\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \\
&= \boldsymbol{z^2 + \frac{1}{z^2} + 2} \qquad 3
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots(答)
$$

である．

(ii) z が C 上を動くとき，$z^2+\dfrac{1}{z^2}$ が描く図形の方程式を考える．

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ と表すことができ

$$\begin{aligned} z^2&=\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^2\\ &=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)\end{aligned}$$

であるから，z^2 は原点 O を中心とする半径 r^2 の円を描く．

$X,\ Y$ を実数として $z^2+\dfrac{1}{z^2}=X+Yi$ とおくと，

$$\begin{aligned} X+Yi&=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)+\left\{r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)\right\}^{-1}\\ &=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)+\frac{1}{r^2}\{\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta)\}\\ &=\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)\cos 2\theta+i\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)\sin 2\theta\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} X=\left(r^2+\dfrac{1}{r^2}\right)\cos 2\theta\\ Y=\left(r^2-\dfrac{1}{r^2}\right)\sin 2\theta\end{cases}$$

θ を消去すると，$X,\ Y$ は

$$\boldsymbol{\frac{X^2}{\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)^2}=1}\qquad\cdots\cdots ④\qquad ②\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

を満たす．$w^2=(X+Yi)+2$ が描く図形は楕円 ④ を実軸方向に 2 だけ平行移動したものであり，中心が点 2 の楕円である．すなわち，w^2 は

$$\frac{(X-2)^2}{\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)^2}=1\qquad\cdots\cdots ⑤$$

を満たす．実軸との交点について調べる．$Y=0$ のとき

$$\frac{(X-2)^2}{\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)^2}=1\qquad\therefore\quad X=2\pm\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)$$

相加平均・相乗平均の関係より

$$r^2+\frac{1}{r^2}\geqq 2\sqrt{r^2\cdot\frac{1}{r^2}}=2$$

等号が成立するのは $r^2=\dfrac{1}{r^2}$ が成り立つときであるが，$r>0$ かつ $r\fallingdotseq 1$ であるから，等号は成立しない．$r^2+\dfrac{1}{r^2}>2$ であり，楕円 ⑤ は実軸の正の部分と負の部分で交わる．

よって，w^2 が描く図形は ③ である． ……(答)