複素数平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C を考える．次の問いに答えよ．

(1) C 上の点 α は $|\alpha+\overline{\alpha}|=|\alpha-\overline{\alpha}|$ を満たし，α の偏角 θ は $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ を満たすとする．α を求めよ．

(2) β は虚部が正の複素数で，$\beta^3=1$ を満たすとする．点 z が β を除く C 上を動くとき，$w(z-\beta)=1$ を満たす点 w が描く図形を複素数平面上に図示せよ．

(26 北海道大 理系 3)

【答】

(1) $\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

(2) 略

【解答】

$$C:|z|=1$$

(1) α は C 上の点で偏角 θ が $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ であるから

$$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta\ \left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$$

と表すことができる．さらに α は

$$|\alpha+\overline{\alpha}|=|\alpha-\overline{\alpha}|$$

を満たすから

$$|2\cos\theta|=|2i\sin\theta|$$
$$\therefore\quad |\cos\theta|=|\sin\theta|$$

である．θ は $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ であるから

$$-\cos\theta=\sin\theta \qquad \therefore\quad \tan\theta=-1 \qquad \therefore\quad \theta=\frac{3}{4}\pi$$

である．よって

$$\boldsymbol{\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) β は $\beta^3=1$ を満たすから

$$(\beta-1)(\beta^2+\beta+1)=0$$
$$\therefore\quad \beta=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

β は虚部が正の複素数であるから

$$\beta=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

である．

z が β を除く C 上を動く，すなわち z が

$$|z|=1 \text{ かつ } z\neq\beta \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たしながら動くとき

$$w(z-\beta)=1 \qquad \cdots\cdots ②$$

を満たす点 w が描く図形は

① かつ ②を満たす z が存在するような w の集合

である．

$$① \text{ かつ } ② \iff \begin{cases} z = \dfrac{1}{w} + \beta \\ \left| \dfrac{1}{w} + \beta \right| = 1 \text{ かつ } \dfrac{1}{w} + \beta \fallingdotseq \beta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = \dfrac{1}{w} + \beta \\ |\,1 + \beta w\,| = |w| \qquad \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

であり，w が描く図形の方程式は ③ である．$\beta \fallingdotseq 0$ より，③ は

$$|\beta|\left| w + \frac{1}{\beta} \right| = |w|$$

と変形される．

$$|\beta| = 1,$$

$$\frac{1}{\beta} = \frac{2}{-1+\sqrt{3}i} = \frac{2(-1-\sqrt{3}i)}{1+3} = -\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

であるから，③ は

$$\left| w - \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right| = |w|$$

であり，w が描く図形は 2 点 0, $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ を結ぶ線分の垂直二等分線である．図示すると右図となる．