z, w を 0 ではない複素数とし，$z^2+2\sqrt{3}zw+4w^2=0$ を満たすとする．ただし，i は虚数単位とする．

(1) $\dfrac{z}{w}$ の値をすべて求めよ．

(2) a を正の実数とし，$z=ai$ とする．このとき，w の偏角 θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲ですべて求めよ．

(26 室蘭工大 4)

【答】

(1) $\dfrac{z}{w}=-\sqrt{3}\pm i$

(2) $\theta=\dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

【解答】

$$z^2+2\sqrt{3}zw+4w^2=0,\quad z \fallingdotseq 0,\ w \fallingdotseq 0$$

(1) $w \fallingdotseq 0$ より，与式は

$$\left(\frac{z}{w}\right)^2+2\sqrt{3}\frac{z}{w}+4=0$$

と変形されるから

$$\boldsymbol{\frac{z}{w}=-\sqrt{3}\pm i} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) (1) の式と $z=ai$ (a は正の実数) により

$$\frac{ai}{w}=-\sqrt{3}\pm i$$

$$\therefore\quad ai=(-\sqrt{3}\pm i)w$$

が成り立つ．$w=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ($r>0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi$) として．辺々を極形式で表す．以下，複号同順として式を変形する．

$$a\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2\left\{\cos\left(\pi\pm\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi\pm\frac{\pi}{6}\right)\right\}\cdot r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$a\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2r\left\{\cos\left(\pi\pm\frac{\pi}{6}+\theta\right)+i\sin\left(\pi\pm\frac{\pi}{6}+\theta\right)\right\}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} 2r=a \\ \pi\pm\dfrac{\pi}{6}+\theta=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\ (n\text{ は整数}) \end{cases}$$

である．偏角 θ は

$$\begin{aligned}\theta&=-\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{6}+2n\pi \\ &=-\frac{2}{3}\pi+2n\pi\ \text{または}\ -\frac{\pi}{3}+2n\pi\end{aligned}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ から

$$\boldsymbol{\theta=\frac{4}{3}\pi\ \text{または}\ \frac{5}{3}\pi} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．