

複素数平面上で、点  $z$  が原点  $O$  を中心とする半径 1 の円を動くとき、複素数  $w = (z + 1)^2$  で表される点  $w$  が描く図形を  $C$  とする。また、 $z$  の偏角を  $\theta$  とし、 $w$  の実部を  $x(\theta)$ 、虚部を  $y(\theta)$  とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $w$  の絶対値  $|w|$  を  $\theta$  を用いて表せ。
- (2)  $0 \leq \theta \leq \pi$  のとき、 $x(\theta)$ 、 $y(\theta)$  それぞれの最大値と最小値を求めよ。
- (3) 図形  $C$  の概形を描け。このとき、実軸、虚軸との共有点も求めよ。ただし、図形  $C$  は実軸を対称軸とする線対称な図形であることを証明なしに用いてもよい。

(26 愛知県大 情報科学 3)

【答】

(1)  $C : |w| = 2(1 + \cos \theta)$

(2)  $x(\theta)$  は  $\theta = 0$  で最大値 4、 $\theta = \frac{2\pi}{3}$  で最小値  $-\frac{1}{2}$  をとる。

$y(\theta)$  は  $\theta = \frac{\pi}{3}$  で最大値  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 、 $\theta = 0, \pi$  で最小値 0 をとる。

(3) 略

【解答】

$$w = (z + 1)^2$$

(1) 点  $z$  は原点  $O$  を中心とする半径 1 の円上を動くから

$$z = \cos \theta + i \sin \theta$$

と表すことができる。  $w$  の絶対値  $|w|$  は

$$\begin{aligned} |w| &= |(z + 1)^2| = |z + 1|^2 = |1 + \cos \theta + i \sin \theta|^2 \\ &= (1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta \\ &= (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) + \sin^2 \theta \\ &= 2(1 + \cos \theta) \end{aligned}$$

……(答)

である。

(2)  $w = x(\theta) + iy(\theta)$  である。

$$\begin{aligned} w &= (z + 1)^2 = (1 + \cos \theta + i \sin \theta)^2 \\ &= (1 + \cos \theta)^2 - \sin^2 \theta + 2i(1 + \cos \theta) \sin \theta \\ &= (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) - \sin^2 \theta + 2i(1 + \cos \theta) \sin \theta \\ &= 2 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta + 2i(1 + \cos \theta) \sin \theta \\ &= 2(1 + \cos \theta)(\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{cases} x(\theta) = 2(1 + \cos \theta) \cos \theta \\ y(\theta) = 2(1 + \cos \theta) \sin \theta \end{cases}$$

である。微分すると

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= 2(-\sin \theta) \cos \theta + 2(1 + \cos \theta)(-\sin \theta) \\ &= -2 \sin \theta(1 + 2 \cos \theta) \end{aligned}$$

である。  $0 \leq \theta \leq \pi$  での  $x(\theta)$  の増減は下表となる。

$\theta$	0	...	$\frac{2\pi}{3}$	...	$\pi$
$x'(\theta)$	(0)	-	0	+	(0)
$x(\theta)$	4	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0

よって,  $x(\theta)$  は

$$\theta = 0 \text{ で最大値 } 4, \quad \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ で最小値 } -\frac{1}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

をとる.  
また

$$\begin{aligned} y'(\theta) &= 2(-\sin\theta)\sin\theta + 2(1+\cos\theta)\cos\theta \\ &= 2\{-(1-\cos^2\theta) + \cos\theta + \cos^2\theta\} \\ &= 2(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1) \\ &= 2(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) \end{aligned}$$

である.  $0 \leq \theta \leq \pi$  での  $y(\theta)$  の増減は下表となる.

$\theta$	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\pi$
$y'(\theta)$	(4)	+	0	-	(0)
$y(\theta)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

よって,  $y(\theta)$  は

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ で最大値 } \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \theta = 0, \pi \text{ で最小値 } 0 \quad \dots\dots(\text{答})$$

をとる.

$$(3) \quad \begin{cases} x(-\theta) = 2(1 + \cos(-\theta))\cos(-\theta) = x(\theta) \\ y(-\theta) = 2(1 + \cos(-\theta))\sin(-\theta) = -y(\theta) \end{cases}$$

であり,  $C$  のグラフは実軸に関して対称である.

実軸との共有点となる  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) の値は

$$2(1 + \cos\theta)\sin\theta = 0 \quad \therefore \theta = 0, \pi$$

虚軸との共有点となる  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) の値は

$$2(1 + \cos\theta)\cos\theta = 0 \quad \therefore \theta = \pi, \frac{\pi}{2}$$

である. さらに,  $0 \leq \theta \leq \pi$  での  $x(\theta)$ ,  $y(\theta)$  の増減をあわせて下表は下のようになる.

よって, 図形  $C$  の概形は右図となる.

$\theta$	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{2\pi}{3}$	...	$\pi$
$x'(\theta)$	(0)	-	-	+	0	+	(0)
$x(\theta)$	4	←	$\frac{3}{2}$	←	$-\frac{1}{2}$	→	0
$y'(\theta)$	(4)	+	0	-		-	(0)
$y(\theta)$	0	↑	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↓	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↓	0

