複素数 z の実部を a，虚部を b とする．ただし，a は正とする．複素数平面において，3 点 $1,\ i,\ z$ が正三角形の頂点となるような組 $(a,\ b)$ を求めると $(a,\ b) = \boxed{\quad エ \quad}$ である．ただし，i は虚数単位である．

(26 立教大 理系 2 月 6 日 1(3))

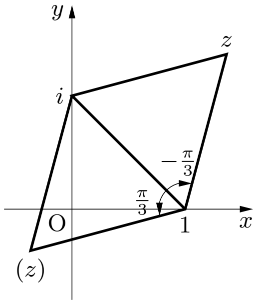
【答】

エ
$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

【解答】

$$z = a + bi \quad (a > 0)$$

3 点 $1,\ i,\ z$ が正三角形の頂点となるのは，z が点 i を点 1 のまわりに $\pm\frac{\pi}{3}$ 回転した点となるときである．



$$z - 1 = \left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}(i-1)$$

(以下，複号同順)

$$z = 1 + \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(i-1)$$

$$= \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

である．z の実部 a は正であるから

$$\boldsymbol{a = \frac{1+\sqrt{3}}{2},\quad b = \frac{1+\sqrt{3}}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．