$i$ を虚数単位とする．$0 < \beta < \alpha < \pi$ を満たす実数 $\alpha$, $\beta$ 対し，2 つの複素数を $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $w = \cos\beta + i\sin\beta$ とする．$z - w$ の絶対値が $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ であるとき，$\alpha - \beta = \boxed{\quad ア \quad}$ である．

(26 立教大 理系 2 月 9 日 1(1))

---

【答】

| ア |
|---|
| $\frac{3}{4}\pi$ |

---

【解答】

$$z = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad w = \cos\beta + i\sin\beta \quad (0 < \beta < \alpha < \pi)$$

であるから

$$z - w = (\cos\alpha - \cos\beta) + i(\sin\alpha - \sin\beta)$$

であり

$$\begin{aligned} |z-w| &= \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2} \\ &= \sqrt{2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos(\alpha - \beta)} \end{aligned}$$

$|z-w| = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ であるから

$$2 - 2\cos(\alpha-\beta) = 2 + \sqrt{2}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0 < \alpha - \beta < \pi$ より

$$\beta - \alpha = \boldsymbol{\frac{3}{4}\pi} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．