

$i$  を虚数単位とし、複素数  $\alpha$  を

$$\alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{4}$$

とする。また、自然数  $n$  に対し、複素数  $z_n$  を次のように定める。

$$z_1 = 4i, \quad z_{n+1} = \alpha z_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

さらに、 $z_n$  の虚部を  $a_n$  とする。このとき、次の問 (i) ~ (v) に答えよ。解答欄には、(i), (ii) については答えのみを、(iii) ~ (v) については答えだけでなく途中経過も書くこと。ただし、複素数  $z$  の偏角  $\theta = \arg z$  の範囲は  $0 \leq \theta < 2\pi$  とする。

- (i)  $\alpha$  の絶対値と偏角をそれぞれ求めよ。  
 (ii)  $z_2, z_3, z_4$  の絶対値と偏角をそれぞれを求めよ。  
 (iii) 自然数  $n$  に対して、 $a_{n+3}$  を  $a_n$  を用いて表せ。  
 (iv) 自然数  $n$  に対し

$$S_n = \sum_{k=1}^{3n} a_k$$

とおく。このとき、極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  の値を求めよ。

- (v) 複素数平面上の 3 点  $A(-i)$ ,  $B\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$ ,  $C\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)$  を頂点とする正三角形およびその内部を  $D$  とする。このとき、 $z_n$  が表す複素数平面上の点  $P_n$  が  $D$  に含まれるような最小の自然数  $n$  を求めよ。

(26 立教大理 (数) 2 月 9 日 4)

【答】

- (i)  $|\alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \arg \alpha = \frac{\pi}{3}$   
 (ii)  $|z_2| = 2\sqrt{2}, \arg z_2 = \frac{5\pi}{6}; \quad |z_3| = 2, \arg z_3 = \frac{7\pi}{6}; \quad |z_4| = \sqrt{2}, \arg z_4 = \frac{3\pi}{2}$   
 (iii)  $a_{n+3} = -\frac{\sqrt{2}}{4}a_n$   
 (iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2(10 + \sqrt{2})}{7}$   
 (v)  $n = 6$

【解答】

$$\alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{4}$$

$$z_1 = 4i, \quad z_{n+1} = \alpha z_n \quad (n \geq 1)$$

- (i)  $\alpha$  を極形式で表すと

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

であるから、 $\alpha$  の絶対値と偏角 ( $0 \leq \arg \alpha < 2\pi$ ) は

$$|\alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \arg \alpha = \frac{\pi}{3} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

(ii)  $z_1 = 4i = 4 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$  であるから

$$\begin{aligned} z_2 &= \alpha z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \cdot 4 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 2\sqrt{2} \left\{ \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) \right\} \\ &= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

であり

$$|z_2| = 2\sqrt{2}, \quad \arg z_2 = \frac{5\pi}{6} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

$$\begin{aligned} z_3 &= \alpha z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \cdot 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \\ &= 2 \left\{ \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} \right) \right\} \\ &= 2 \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

であり

$$|z_3| = 2, \quad \arg z_3 = \frac{7\pi}{6} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

$$\begin{aligned} z_4 &= \alpha z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \cdot 2 \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) \\ &= \sqrt{2} \left\{ \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{6} \right) \right\} \\ &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

であり

$$|z_4| = \sqrt{2}, \quad \arg z_4 = \frac{3\pi}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

- $|z_{n+1}| = |\alpha z_n| = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_n|$ ,  $\arg z_{n+1} = \arg(\alpha z_n) = \frac{\pi}{3} + \arg z_n$  ( $0 \leq \arg z_{n+1} < 2\pi$ )

として計算すると見通しがよい.

(iii)  $a_n$  は  $z_n$  の虚部である.

$$\begin{aligned} z_{n+3} &= \alpha z_{n+2} = \alpha^2 z_{n+1} = \alpha^3 z_n \\ &= \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \left( \cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} \right) z_n \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} (-1) z_n \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4} z_n \end{aligned}$$

$z_{n+3}$  と  $z_n$  の虚部を比較すると

$$a_{n+3} = -\frac{\sqrt{2}}{4} a_n \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad S_n &= \sum_{k=1}^{3n} a_k = \sum_{k=1}^n (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left\{ \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{k-1} a_1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{k-1} a_2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{k-1} a_3 \right\} \quad (\because \text{(iii)}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{k-1} \left(4 + 2\sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{6} + 2 \sin \frac{7\pi}{6}\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{k-1} (3 + \sqrt{2})
 \end{aligned}$$

である.  $-1 < -\frac{\sqrt{2}}{4} < 1$  を満たすから

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{3 + \sqrt{2}}{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)} = \frac{4(3 + \sqrt{2})}{4 + \sqrt{2}} = \frac{4(3 + \sqrt{2})(4 - \sqrt{2})}{16 - 2} \\
 &= \frac{2(12 + \sqrt{2} - 2)}{7} = \frac{2(10 + \sqrt{2})}{7} \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

である.

(v) 3点  $A(-i)$ ,  $B\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$ ,  $C\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)$  を頂

点とする正三角形およびその内部である領域  $D$  は右図の斜線部分である.  $z_n$  が表す複素数平面上の点  $P_n$  が  $D$  に含まれるためには

$$|z_n| \leq 1$$

であることが必要である. (ii) より,  $n = 1, 2, 3, 4$  のとき

$$|z_n| > 1$$

であるから,  $n \geq 5$  が必要である.

$n = 5$  のとき

$$|z_5| = \frac{|z_4|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1, \quad \arg z_5 = \frac{\pi}{3} + \arg z_4 = \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2} = \frac{11\pi}{6}$$

であり,  $P_5 \notin D$  である.

$n = 6$  のとき

$$|z_6| = \frac{|z_5|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \arg z_6 = \frac{\pi}{3} + \arg z_5 = \frac{\pi}{3} + \frac{11\pi}{6} = \frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi$$

であり,  $P_6 \in D$  である.

よって, 点  $P_n$  が  $D$  に含まれるような最小の自然数  $n$  は

$$n = 6$$

$\dots\dots(\text{答})$

である.

