i を虚数単位とし，$\alpha=2+i$ とする．

(1) $\alpha^2=\boxed{11}+\boxed{12}i$ であり，$\alpha^3=\boxed{13}+\boxed{14}\boxed{15}i$ である．

(2) $\dfrac{\alpha^3}{\overline{\alpha}}+\dfrac{\overline{\alpha}^3}{\alpha}=\dfrac{\boxed{16}\boxed{17}\boxed{18}}{\boxed{19}}$ である．

(3) n を正の整数とする．α^n の虚部が負であるという．このような n のうち最小のものは $n=\boxed{20}$ である．また，$n=\boxed{20}$ のとき，α^n の虚部は $\boxed{21}\boxed{22}\boxed{23}$ である．

(26 青山学院大 全学部 理系 2)

【答】

11	12	13	1415	161718	19	20	212223
3	4	2	11	-14	5	7	-29

【解答】

$$\alpha=2+i$$

(1)
$$\alpha^2=(2+i)^2=4-1+4i=\mathbf{3+4}\boldsymbol{i} \quad \cdots\cdots(答)$$

であり

$$\alpha^3=(3+4i)(2+i)=6-4+11i=\mathbf{2+11}\boldsymbol{i} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) (1) より

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^3}{\overline{\alpha}}+\frac{\overline{\alpha}^3}{\alpha}&=\frac{\alpha^4+\overline{\alpha}^4}{\overline{\alpha}\alpha}=\frac{(\alpha^2+\overline{\alpha}^2)^2-2\alpha^2\overline{\alpha}^2}{\overline{\alpha}\alpha}\\&=\frac{(2\cdot3)^2-2(3^2+4^2)}{\sqrt{3^2+4^2}}\quad(\because\ (1))\\&=\frac{36-50}{5}=\frac{\mathbf{-14}}{\mathbf{5}}\end{aligned} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3)
$$\alpha^4=(2+11i)(2+i)=4-11+24i=-7+24i$$
$$\alpha^5=(-7+24i)(2+i)=-14-24+41i=-38+41i$$
$$\alpha^6=(-38+41i)(2+i)=-76-41+44i=-117+44i$$
$$\alpha^7=(-117+44i)(2+i)=-234-44-29i=-278-29i$$

であり，α^n の虚部が負である n のうち最小のものは

$$n=\mathbf{7} \quad \cdots\cdots(答)$$

であり，α^7 の虚部は

$$\mathbf{-29} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．