数列 $\{a_n\}$ に対して

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められる数列 $\{b_n\}$ を，$\{a_n\}$ の階差数列という．

(1) $\{a_n\}$ の初項は 1 とする．また，$\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項が

$$b_n = 4n - 1$$

で表されるとする．

(i) $b_1 = \boxed{\text{ア}}$ であるから，$a_2 = \boxed{\text{イ}}$ となる．さらに，$b_2 = \boxed{\text{ウ}}$ であるから，$a_3 = \boxed{\text{エオ}}$ となる．

(ii) n を 2 以上の自然数とする．このとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{\boxed{\boxed{\text{カ}}}} b_k \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つことから

$$a_n = \boxed{\text{キ}}\,n^2 - \boxed{\text{ク}}\,n + \boxed{\text{ケ}}$$

であることがわかる．

$\boxed{\boxed{\text{カ}}}$ の解答群

⓪ $n-1$	① n	② $n+1$	③ $n+2$

(2) 太郎さんは，①を変形すると $\displaystyle\sum_{k=1}^{\boxed{\boxed{\text{カ}}}} b_k = a_n - a_1$ となることから，数列の和を求めるために次のことを考えた．

発想

ある数列 $\{d_n\}$ の和を求めたいときは，数列 $\{c_n\}$ で，$\{c_n\}$ の階差数列が $\{d_n\}$ となるものを見つければよい．

太郎さんは，この**発想**に基づいて，一般項が

$$d_n = (2n+1)\cdot 2^n$$

で表される数列 $\{d_n\}$ の和を求めることにした．

数列 $\{c_n\}$ で，$\{c_n\}$ の階差数列が d_n となるもの，すなわち

$$(2n+1)\cdot 2^n = c_{n+1} - c_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots ②$$

となるものを見つけたい．太郎さんは，$\{d_n\}$ の一般項が n の 1 次式と 2^n の積であることから，$\{c_n\}$ の一般項が

$$c_n = (pn+q)\cdot 2^n$$

と表されるのではないかと考えた．ここで，$p,\ q$ は定数である．このとき，$c_{n+1} - c_n$ を $n,\ p,\ q$ を用いて表すと

$$c_{n+1} - c_n = \left\{\boxed{\boxed{\text{コ}}}\,n + \boxed{\text{サ}}\right\}\cdot 2^n$$

となる．

よって，$p =$ $\boxed{\text{シ}}$，$q =$ $\boxed{\text{スセ}}$ のとき ② が成り立つ．

以上のことから，すべての自然数 n について，数列 $\{d_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n} d_k = \left(\boxed{\boxed{\text{ソ}}}\right) \cdot 2^{n+1} + \boxed{\text{タ}}$$

となることがわかる．

$\boxed{\boxed{\text{コ}}}$，$\boxed{\boxed{\text{サ}}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい．)

⓪ p	① q	② $2p$	③ $2q$
④ $(p+q)$	⑤ $(2p+q)$	⑥ $(p+2q)$	⑦ $2(p+q)$

$\boxed{\boxed{\text{ソ}}}$ の解答群

⓪ $n-1$	① $n+1$	② $2n-3$
③ $2n-1$	④ $2n+1$	⑤ $2n+3$

(3) 花子さんは，一般項が

$$d_n = (n^2 - n - 1) \cdot 2^n$$

で表される数列 $\{d_n\}$ の和を求めることにした．(2) の発想に基づいて考えると，すべての自然数 n について，$\{d_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n} d_k = \left(\boxed{\boxed{\text{チ}}}\right) \cdot 2^{n+1} - \boxed{\text{ツ}}$$

となることがわかる．

$\boxed{\boxed{\text{チ}}}$ の解答群

⓪ $3n-3$	① $3n+3$	② $5n-7$
③ $5n+7$	④ n^2-n-1	⑤ n^2+n+1
⑥ n^2+3n-3	⑦ n^2-3n+3	⑧ n^2+5n-7
⑨ n^2-5n+7		

(26 共通テスト 本試験 IIBC 第 4 問)

【答】

ア	イ	ウ	エオ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	スセ	ソ	タ	チ	ツ
3	4	7	11	0	2	3	2	0	5	2	−3	3	2	7	6

【解答】

(1)
$$a_1 = 1$$

$$b_n = a_{n+1} - a_n = 4n - 1$$

(i) 条件より

$$b_1 = 4 \cdot 1 - 1 = \mathbf{3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であるから

$$a_2 - a_1 = 3 \qquad \therefore \quad a_2 = 1 + 3 = \mathbf{4} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる．さらに

$$b_2 = 4 \cdot 2 - 1 = \mathbf{7} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$a_3 - a_2 = 7 \qquad \therefore \quad a_3 = 4 + 7 = \mathbf{11} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる．

(ii) $b_n = a_{n+1} - a_n$ より，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{\boldsymbol{n-1}} b_k \qquad 0 \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

が成り立つことから

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k-1) \\ &= 1 + \frac{(n-1)\{3+(4n-5)\}}{2} \quad (\because \text{ 等差数列の和の公式}) \\ &= 1 + (n-1)(2n-1) \\ &= 2n^2 - 3n + 2 \quad (n \geqq 2) \end{aligned}$$

である．これは $n = 1$ のときも成り立つ．

よって，すべての自然数 n に対して

$$a_n = \mathbf{2}n^2 - \mathbf{3}n + \mathbf{2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であることがわかる．

(2) $$d_n = (2n+1) \cdot 2^n$$

の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_k$ を求めたい．

$$(2n+1) \cdot 2^n = c_{n+1} - c_n \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ②$$

となる数列 $\{c_n\}$ を見つけるために $c_n = (pn+q) \cdot 2^n$ (p, q は定数) とおいてみる．

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \{p(n+1)+q\} \cdot 2^{n+1} - (pn+q) \cdot 2^n \\ &= \{2(pn+p+q) - (pn+q)\} \cdot 2^n \\ &= \{\boldsymbol{p}n + (\boldsymbol{2p+q})\} \cdot 2^n \qquad 0,\ 5 \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

となる．これより ② は

$$(2n+1) \cdot 2^n = (pn+2p+q) \cdot 2^n$$

$$\begin{cases} p = 2 \\ 2p + q = 1 \end{cases} \qquad \therefore \quad p = \mathbf{2},\ q = \mathbf{-3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\therefore \quad c_n = (2n-3) \cdot 2^n$$

のとき ② は成り立つ．

以上のことから，すべての自然数 n について，数列 $\{d_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} d_k &= \sum_{k=1}^{n}(c_{k+1} - c_k) \\ &= c_{n+1} - c_1 \\ &= \{2(n+1)-3\} \cdot 2^{n+1} - (2 \cdot 1 - 3) \cdot 2^1 \\ &= (\boldsymbol{2n-1}) \cdot 2^{n+1} + \mathbf{2} \qquad 3 \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

となることがわかる．

(3) $$d_n=(n^2-n-1)\cdot 2^n$$

の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_k$ を求めたい．

$$(n^2-n-1)\cdot 2^n=c_{n+1}-c_n \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ③$$

となる数列 $\{c_n\}$ を見つけるために $c_n=(pn^2+qn+r)\cdot 2^n$ ($p,\ q,\ r$ は定数) とおいてみる．

$$\begin{aligned} c_{n+1}-c_n &= \{p(n+1)^2+q(n+1)+r\}\cdot 2^{n+1}-(pn^2+qn+r)\cdot 2^n \\ &= \{pn^2+(2p+q)n+p+q+r)\}2^{n+1}-(pn^2+qn+r)\cdot 2^n \\ &= \{pn^2+(4p+q)n+2p+2q+r\}\cdot 2^n \end{aligned}$$

となる．これより ③ は

$$(n^2-n-1)\cdot 2^n=\{pn^2+(4p+q)n+2p+2q+r\}\cdot 2^n$$

$$\begin{cases} p=1 \\ 4p+q=-1 \\ 2p+2q+r=-1 \end{cases} \qquad \therefore \quad p=1,\ q=-5,\ r=7 \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\therefore \quad c_n=(n^2-5n+7)\cdot 2^n$$

のとき ③ は成り立つ．

以上のことから，すべての自然数 n について，数列 $\{d_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} d_k &= \sum_{k=1}^{n}(c_{k+1}-c_k) \\ &= c_{n+1}-c_1 \\ &= \{(n+1)^2-5(n+1)+7\}\cdot 2^{n+1}-(1-5+7)\cdot 2^1 \\ &= (\boldsymbol{n^2-3n+3})\cdot 2^{n+1}-\boldsymbol{6} \qquad ⑦ \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

となることがわかる．