

自然数の定数 p に対して、1 から n までの自然数の p 乗の和を

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$$

とおく。太郎さんと花子さんは、次の3つの等式について話している。

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \text{①}$$

$$S_2(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \text{②}$$

$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \quad \text{③}$$

太郎： $S_1(n)$ は初項 1，末項 n ，項数 n の等差数列の和とみなせるから，等差数列の和の公式を用いると等式 ① は示せるよね。でも，等式 ② や ③ はどうして成り立つんだろう。

花子： 数学的帰納法を用いたらどうだろう。

太郎： 確かに等式が成り立つことは示せそうだね。でも，等式 ② や ③ の右辺はどうやって求めたんだろう。

花子： じゃあ，実際に等式 ① がわかっているとして，等式 ② の右辺を求めてみよう。まずは，恒等式

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

を利用すればいいんだよ。この恒等式に $x = 1, 2, 3, \dots, n$ と順に代入して得られる n 個の等式を辺々加えると，

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3S_2(n) + 3S_1(n) + n$$

が成り立つよね。その後に，等式 ① を代入して，式を整理すると，

$$S_2(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

が得られるね。

太郎： それだと，等式 ① と ② を用いれば，等式 ③ の右辺を求めることができそうだし，等式 ①，②，③ を用いれば， $S_4(n)$ も求めることができそうだね。

以下の問いに答えよ。

(1) 次の和を求めよ。必要ならば，等式 ①，②，③ を用いてもよい。

ア. $\sum_{k=1}^{10} (3k-2)$

イ. $\sum_{k=1}^{10} (k+1)^3$

(2) 数学的帰納法によって，等式 ② を証明せよ。

(3) 和 $S_4(n)$ を求めよ。必要ならば，等式 ①，②，③ を用いてもよい。ただし，答えは式を展開して， n についての降べきの順に整理して答えよ。

【答】

$$(1) \text{ ア. } \sum_{k=1}^{10} (3k-2) = 145 \quad \text{イ. } \sum_{k=1}^{10} (k+1)^3 = 4355$$

(2) 略

$$(3) S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

【解答】

(1) ア. 等差数列の和の公式を用いると

$$\sum_{k=1}^{10} (3k-2) = \frac{10(1+28)}{2} = 5 \cdot 29 = \mathbf{145} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

イ. $j = k + 1$ とおくと

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (k+1)^3 &= \sum_{j=2}^{11} j^3 = \left(\sum_{j=1}^{11} j^3 \right) - 1^3 = \frac{1}{4} \cdot 11^2 \cdot 12^2 - 1 \quad (\because \textcircled{3}) \\ &= 121 \cdot 36 - 1 = \mathbf{4355} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

である.

(2) すべての自然数について, 等式

$$S_2(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す.

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

であるから

(i) $n = 1$ のとき

$$S_2(1) = 1^2 = 1, \quad (\textcircled{2} \text{の右辺}) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

であり, $n = 1$ のとき $\textcircled{2}$ は成り立つ.

(ii) $n = k$ での成立を仮定すると

$$\begin{aligned} S_2(k+1) &= S_2(k) + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1) + 6(k+1)\} \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\} \end{aligned}$$

$n = k + 1$ のときも $\textcircled{2}$ は成り立つ.

(i), (ii) より, すべての自然数 n について等式 $\textcircled{2}$ は成り立つ. $\dots\dots(\text{証明終わり})$

(3) 恒等式

$$(x+1)^5 - x^5 = 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

を利用する. この恒等式に $x = 1, 2, 3, \dots, n$ と順に代入して得られる n 個の等式を辺々加えると

$$(n+1)^5 - 1^5 = 5S_4(n) + 10S_3(n) + 10S_2(n) + 5S_1(n) + n$$

が成り立つ。等式 ①, ②, ③ を用いて, 整理すると

$$\begin{aligned}
 & S_4(n) \\
 &= \frac{1}{5} \{(n+1)^5 - 1 - 10S_3(n) - 10S_2(n) - 5S_1(n) - n\} \\
 &= \frac{(n+1)^5 - 1 - n}{5} - 2 \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n}{5} - \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{2} - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{3} - \frac{n^2 + n}{2} \\
 &= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

である.