数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = n^3 - 15n^2 + 68n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で与えられている．

(1) $a_1 = \boxed{7}\boxed{8}$

(2) $\{a_n\}$ の一般項を

$$a_n = pn^2 + qn + r \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と表せば，

$$p = \boxed{9},\quad q = \boxed{10}\boxed{11}\boxed{12},\quad r = \boxed{13}\boxed{14}$$

である．

(3) $\boxed{15} \leqq n \leqq \boxed{16}$ は $a_n \leqq 0$ であるための必要十分条件である．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} |a_k| = \boxed{17}\boxed{18}\boxed{19}$

(26 青山学院大 全学部 文系 2)

【答】

78	9	101112	1314	15	16	171819
54	3	-33	84	4	7	204

【解答】

$$S_n = n^3 - 15n^2 + 68n \quad (n \geqq 1)$$

(1) $$a_1 = S_1 = 1^3 - 15 \cdot 1^2 + 68 \cdot 1 = \mathbf{54}$$ ……(答)

である．

(2) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^3 - 15n^2 + 68n) - \{(n-1)^3 - 15(n-1)^2 + 68(n-1)\} \\ &= (3n^2 - 3n + 1) + 15(-2n + 1) + 68 \\ &= 3n^2 - 33n + 84 \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ．

よって，$a_n = pn^2 + qn + r \quad (n \geqq 1)$ となる $p,\ q,\ r$ の値は

$$\boldsymbol{p = 3,\quad q = -33,\quad r = 84}$$ ……(答)

である．

(3) $a_n \leqq 0$ であるための必要十分条件は

$$3n^2 - 33n + 84 \leqq 0$$
$$3(n-7)(n-4) \leqq 0$$
$$\therefore\quad \mathbf{4} \leqq n \leqq \mathbf{7}$$ ……(答)

である．

(4) $\{(n,\ a_n)\}$ は放物線 $y = 3x^2 - 33x + 84$ 上の点列であり，この放物線は軸 $x = \dfrac{11}{2}$ に関して対称である．

$$\frac{1+10}{2} = \frac{11}{2},\quad \frac{4+7}{2} = \frac{11}{2}$$

であることに注意すると

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{10} |a_k| &= 2 \sum_{k=1}^{5} |a_k| = 2 \left\{ \sum_{k=1}^{3} a_k + \sum_{k=4}^{5} (-a_k) \right\} \\
&= 2 \left\{ \sum_{k=1}^{3} 3(k^2 - 11k + 28) - (a_4 + a_5) \right\} \\
&= 2 \left\{ 3 \left(\frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} - 11 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + 28 \cdot 3 \right) - \{0 + 3(25 - 55 + 28)\} \right\} \\
&= 2\{3 \cdot (14 - 66 + 84) - (-6)\} \\
&= 2(96 + 6) \\
&= \mathbf{204} \qquad \cdots\cdots (\text{答})
\end{aligned}
$$

である.