数列 $\{a_n\}$ は，すべての項が正であり，次の条件を満たすとする．

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1}(a_n + 1) = 2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ．

(1) $b_n = \dfrac{1}{a_n + 2}$ とおく．$b_{n+1}$ を $b_n$ で表せ．

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(26 北海道大 文系 2)

---

【答】

(1) $b_{n+1} = \dfrac{1 - b_n}{2}$

(2) $a_n = \dfrac{(-2)^n - 2}{(-2)^n + 1}$

---

【解答】

$$a_1 = 4 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$a_{n+1}(a_n + 1) = 2 \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) $b_n = \dfrac{1}{a_n + 2}$ とおくと

$$b_n = \frac{1}{a_n + 2} \iff b_n(a_n + 2) = 1 \iff a_n = \frac{1}{b_n} - 2$$

であり，② を $b_n$，$b_{n+1}$ で表すと

$$\left(\frac{1}{b_{n+1}} - 2\right)\left(\frac{1}{b_n} - 2 + 1\right) = 2$$

$$\frac{1}{b_{n+1}}\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} - \frac{2}{b_n} + 2 = 2$$

$$\frac{1 - b_n - 2b_{n+1}}{b_{n+1}b_n} = 0$$

$$\therefore \quad 1 - b_n - 2b_{n+1} = 0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{b_{n+1} = \frac{1 - b_n}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) (1) の式は

$$b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{3}\right)$$

と変形される．数列 $\left\{b_n - \dfrac{1}{3}\right\}$ は初項 $b_1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4+2} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{6}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad b_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

である．$a_n$ で表すと

$$\frac{1}{a_n + 2} = \frac{(-2)^n + 1}{3(-2)^n}$$

$$a_n + 2 = \frac{3(-2)^n}{(-2)^n + 1}$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{3(-2)^n}{(-2)^n + 1} - 2 = \boldsymbol{\frac{(-2)^n - 2}{(-2)^n + 1}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である