数列 $\{a_n\}$ は次の条件を満たすとする．

$$a_1=-8,\quad a_{n+1}(a_n+1)=2\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ．

(1) $a_n \fallingdotseq -2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ．

(2) $b_n=\dfrac{1}{a_n+2}$ とおく．b_{n+1} を b_n で表せ．

(3) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(26 北海道大 理系 1)

【答】

(1) 略

(2) $b_{n+1}=\dfrac{1-b_n}{2}$

(3) $a_n=\dfrac{(-2)^n-6}{(-2)^n+3}$

【解答】

$$a_1=-8 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$a_{n+1}(a_n+1)=2\quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) すべての自然数 n について

$$a_n \fallingdotseq -2 \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき，① より $n=1$ のとき $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定する．② より $a_k+1 \fallingdotseq 0$ であるから

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{2}{a_k+1} \\ &\fallingdotseq \frac{2}{-2+1} \quad (\because\ \text{帰納法の仮定}) \\ &= -2 \end{aligned}$$

であり，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数について $(*)$ は成り立つ．　……(証明終わり)

- 背理法を用いる．$a_n=-2$ となる n $(\geqq 2)$ が存在すると仮定する．
  ② より $a_n(a_{n-1}+1)=2$ が成り立ち

  $$-2(a_{n-1}+1)=2 \qquad \therefore\quad a_{n-1}=-2$$

  これを繰り返し用いると

  $$a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots=a_1=-2$$

  となる．これは ① に反する．
  よって，$a_n=-2$ となる n $(\geqq 2)$ は存在しない．① もあわせると $a_n=-2$ となる自然数 n は存在しない．

(2) (1) より $b_n = \dfrac{1}{a_n+2}$ とおくことができる．このとき

$$b_n = \frac{1}{a_n+2} \iff b_n(a_n+2)=1 \iff a_n = \frac{1}{b_n}-2$$

であり，② を b_n，b_{n+1} で表すと

$$\left(\frac{1}{b_{n+1}}-2\right)\left(\frac{1}{b_n}-2+1\right)=2$$

$$\frac{1}{b_{n+1}}\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{2}{b_n}+2=2$$

$$\frac{1-b_n-2b_{n+1}}{b_{n+1}b_n}=0$$

$$\therefore\quad 1-b_n-2b_{n+1}=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{b_{n+1}=\frac{1-b_n}{2}}$$ ……(答)

である．

(3) (2) の式は

$$b_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{1}{3}\right)$$

と変形される．数列 $\left\{b_n-\dfrac{1}{3}\right\}$ は初項 $b_1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{-8+2}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad b_n=\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

である．a_n で表すと

$$\frac{1}{a_n+2}=\frac{(-2)^n+3}{3(-2)^n}$$

$$a_n+2=\frac{3(-2)^n}{(-2)^n+3}$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{3(-2)^n}{(-2)^n+3}-2=\boldsymbol{\frac{(-2)^n-6}{(-2)^n+3}}$$ ……(答)

である．