数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=(n-1)^2+\sum_{k=1}^{n}a_k\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たしている．また，数列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_n+2n-1$ で定める．次の問いに答えよ．

(1) $a_2$ の値を求めよ．

(2) $a_{n+1}$ を $a_n$ と $n$ を用いて表せ．

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(26 和歌山大 教育・経済・観光・シス工・社会 2)

---

【答】

(1) $a_2=1$

(2) $a_{n+1}=2a_n+2n-3$

(3) $b_n=2^n$

(4) $a_n=2^n-2n+1$

---

【解答】

$$a_1=1 \qquad\cdots\cdots ①$$

$$a_{n+1}=(n-1)^2+\sum_{k=1}^{n}a_k\quad(n\geqq 1)\qquad\cdots\cdots ②$$

(1) ①, ② より

$$a_2=(1-1)^2+1=\mathbf{1}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(2) ② の $n$ を $n-1$ に変えると

$$a_n=(n-2)^2+\sum_{k=1}^{n-1}a_k\quad(n\geqq 2)\qquad\cdots\cdots ③$$

であり，$n\geqq 2$ を満たす $n$ について，②, ③ の辺々を引くと

$$a_{n+1}-a_n=(n-1)^2-(n-2)^2+a_n$$

$$a_{n+1}=2a_n+2n-3\qquad\cdots\cdots ④$$

が成り立つ．(1) より $a_2=1$ であり，$2a_1+2\cdot 1-3=2\cdot 1+2\cdot 1-3=1$ であるから，④ は $n=1$ のときも成り立つ．

よって

$$\boldsymbol{a_{n+1}=2a_n+2n-3\ (n\geqq 1)}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $b_n=a_n+2n-1$ とおくと，$a_n=b_n-2n+1$ であり，④ は

$$b_{n+1}-2(n+1)+1=2(b_n-2n+1)+2n-3$$

$$b_{n+1}-2n-1=2b_n-2n-1$$

$$\therefore\quad b_{n+1}=2b_n$$

である．$\{b_n\}$ は初項 $b_1=1+2\cdot 1-1=2$，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n=2\cdot 2^{n-1}=\boldsymbol{2^n}\quad(n\geqq 1)\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(4) (3) より

$$a_n=b_n-2n+1=\boldsymbol{2^n-2n+1}\quad(n\geqq 1)\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

- (2) から $\{a_n\}$ の一般項を求める方法はいくつかある．$b_n=a_n+2n-1$ も誘導なしで導けるようにしておこう．