数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．

(1) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおく．b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $n \geqq 3$ を満たす，すべての自然数 n に対して，$a_n<\dfrac{1}{3n}$ となることを，数学的帰納法によって示せ．

(26 室蘭工大 3)

【答】

(1) $b_{n+1}=2b_n+3$

(2) $a_n=\dfrac{1}{2^{n+1}-3}$

(3) 略

【解答】

$$a_1=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+2}\quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) ① より $a_1 \neq 0$ であり，② もあわせると，数学的帰納法によりすべての正の自然数 n に対して $a_n \neq 0$ であることが確認される．② について，辺々の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+2}{a_n}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+3$$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，b_{n+1} は

$$\boldsymbol{b_{n+1}=2b_n+3} \qquad \cdots\cdots(答)$$

と表すことができる．

(2) (1) の式は

$$b_{n+1}+3=2(b_n+3)$$

と変形される．数列 $\{b_n+3\}$ は初項 $b_1+3=\dfrac{1}{1}+3=4$，公比 2 の等比数列なので

$$b_n+3=4\cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore\quad b_n=2^{n+1}-3$$

である．よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{2^{n+1}-3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $n \geqq 3$ を満たすすべての自然数 n に対して

$$a_n<\frac{1}{3n} \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す．

(i) $n=3$ のとき

$$a_3=\frac{1}{2^{3+1}-3}=\frac{1}{13}<\frac{1}{3\cdot 3}$$

であり，$n=3$ のとき ① は成り立つ．

(ii) $n=k\ (\geqq 3)$ のときの成立を仮定する．すなわち

$$\frac{1}{2^{k+1}-3}<\frac{1}{3k} \qquad \therefore\quad 2^{k+1}-3>3k \qquad \therefore\quad 2^{k+1}>3k+3$$

と仮定する．

$$\begin{aligned} 2^{k+2}-3 &= 2\cdot 2^{k+1}-3 \\ &> 2(3k+3)-3 \quad (\because\ \text{帰納法の仮定}) \\ &= 6k+3=3k+3+3k \\ &> 3(k+1) \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2^{k+2}-3}<\frac{1}{3(k+1)}$$

$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(i), (ii) より，$n\geqq 3$ を満たすすべての自然数 n に対して，$(*)$ が成り立つ．

$\cdots\cdots$ (証明終わり)