次の条件によって定められる 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ と x の多項式 $F_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ がある．

- $a_1=2,\ b_1=0$
- $F_n(x)=\displaystyle\int_0^x (a_nt+b_n)\,dt \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
- すべての自然数 n に対して，$a_{n+1}x+b_{n+1}$ は $F_n(x)$ を x^2-3x+1 で割った余りに等しい．

このとき，次の問 (1)〜(6) に答えよ．解答欄には，(2) については答えのみを，(1)，(3)〜(6) については答えだけでなく途中経過も書くこと．

(1) $F_n(x)$ を $a_n,\ b_n$ を用いた x の式で表せ．
(2) a_2 と b_2 を求めよ．
(3) a_{n+1} および b_{n+1} を $a_n,\ b_n$ を用いてそれぞれ表せ．
(4) すべての自然数 n に対して $c_n=a_n+b_n$ とおく．c_{n+1} を c_n を用いて表せ．
(5) すべての自然数 n に対して $d_n=a_n+2b_n$ とおく．d_{n+1} を d_n を用いて表せ．
(6) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(26 立教大 文系 2 月 6 日 3)

【答】

(1) $F_n(x)=\dfrac{a_n}{2}x^2+b_nx$
(2) $a_2=3,\ b_2=-1$
(3) $a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n+b_n$，$b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n$
(4) $c_{n+1}=c_n$
(5) $d_{n+1}=\dfrac{1}{2}d_n$
(6) $a_n=4-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

【解答】

- $a_1=2,\ b_1=0$ …… ①
- $F_n(x)=\displaystyle\int_0^x (a_nt+b_n)\,dt \quad (n \geqq 1)$ …… ②
- $F_n(x)=(x^2-3x+1)(x\text{ の多項式})+a_{n+1}x+b_{n+1} \quad (n \geqq 1)$ …… ③

(1) ② より

$$F_n(x)=\left[a_n\frac{t^2}{2}+b_nt\right]_0^x=\boldsymbol{\frac{a_n}{2}x^2+b_nx} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (1) と ① より

$$F_1(x)=\frac{a_1}{2}x^2+b_1x=x^2$$
$$=(x^2-3x+1)\cdot 1+3x-1$$

であり，$F_1(x)$ を x^2-3x+1 で割った余りは $3x-1$ である．③ より $F_1(x)$ を x^2-3x+1 で割った余りは a_2x+b_2 であるから，余りを比較すると

$$\boldsymbol{a_2=3,\quad b_2=-1} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) (1) より

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{a_n}{2}x^2 + b_n x \\ &= (x^2-3x+1)\cdot\frac{a_n}{2} + \left(\frac{3}{2}a_n + b_n\right)x - \frac{a_n}{2} \end{aligned}$$

であり，$F_n(x)$ を x^2-3x+1 で割った余りは $\left(\frac{3}{2}a_n+b_n\right)x-\frac{a_n}{2}$ である．③ より $F_n(x)$ を x^2-3x+1 で割った余りは $a_{n+1}x+b_{n+1}$ であるから，余りを比較すると

$$\boldsymbol{a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n + b_n}, \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\boldsymbol{b_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) $c_n = a_n + b_n$ とおくと

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= \left(\frac{3}{2}a_n + b_n\right) + \left(-\frac{1}{2}a_n\right) \\ &= a_n + b_n \\ &= c_n \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{c_{n+1} = c_n} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(5) $d_n = a_n + 2b_n$ とおくと

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= a_{n+1} + 2b_{n+1} \\ &= \left(\frac{3}{2}a_n + b_n\right) + 2\left(-\frac{1}{2}a_n\right) \\ &= \frac{1}{2}a_n + b_n \\ &= \frac{1}{2}d_n \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(6) (4) より

$$c_n = c_{n-1} = \cdots = c_1 = a_1 + b_1 = 2 + 0 = 2$$

(5) より，$\{d_n\}$ は初項 $d_1 = a_1 + 2b_1 = 2 + 2\cdot 0 = 2$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$d_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

である．

$$\therefore \quad \begin{cases} a_n + b_n = 2 \\ a_n + 2b_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- (4)，(5) の誘導はどこからきたのか？数列 $\{a_n + tb_n\}$ (t は定数) について考えてみる．

$$\begin{aligned} a_{n+1} + tb_{n+1} &= \left(\frac{3}{2}a_n + b_n\right) + t\left(-\frac{1}{2}a_n\right) \\ &= \frac{3-t}{2}a_n + b_n \\ &= \frac{3-t}{2}\left(a_n + \frac{2}{3-t}b_n\right) \end{aligned}$$

である．これにより，$t=\dfrac{2}{3-t}$ を満たす t がみつかれば，数列 $\{a_n+tb_n\}$ は公比 $\dfrac{3-t}{2}$ の等比数列である．t の値は

$$\begin{aligned}
&t(3-t)=2\\
&t^2-3t+2=0\\
&(t-1)(t-2)=0\\
\therefore\quad &t=1,\ 2
\end{aligned}$$

である．よって，数列 $\{a_n+1\cdot b_n\}$，$\{a_n+2\cdot b_n\}$，すなわち (4)，(5) の数列は等比数列のなることがわかる．

- 一般化しておく．連立漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n\\ b_{n+1}=ra_n+sb_n \end{cases}$$

について，数列 $\{a_n-tb_n\}$ を考える ($\{a_n+tb_n\}$ ではなく，$\{a_n-tb_n\}$ とすると最後キレイな結果が得られる)．

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-tb_{n+1}&=(pa_n+qb_n)-t\,(ra_n+sb_n)\\
&=(p-rt)a_n+(q-st)b_n\\
&=(p-rt)\left(a_n-\frac{st-q}{p-rt}b_n\right)
\end{aligned}$$

である．これにより，$t=\dfrac{st-q}{p-rt}$ を満たす t がみつかれば，数列 $\{a_n+tb_n\}$ は公比 $p-rt$ の等比数列である．t の値は

$$\begin{aligned}
&t(p-rt)=st-q\\
&rt^2+st=pt+q\\
\therefore\quad &t=\frac{pt+q}{rt+s}\quad \text{(連立漸化式の特性方程式としてこの形がキレイ)}
\end{aligned}$$

の解として得られる．

本問では

$$t=\frac{\frac{3}{2}t+1}{-\frac{1}{2}t}\qquad \therefore\quad t=\frac{3t+2}{-t}$$

$$\therefore\quad t^2+3t+2=0\qquad \therefore\quad (t+1)(t+2)=0\qquad \therefore\quad t=-1,-2$$

であり，$\{a_n-(-1)b_n\}$，$\{a_n-(-2)b_n\}$ を考えることになる．