座標平面上の放物線 $y=x^2$ を C とする．以下の問いに答えよ．

(1) 正の実数 u に対し，放物線 C の接線で点 $(u,\ u-1)$ を通るものがちょうど 2 本あることを示せ．

(2) 正の実数 u に対し，放物線 C の相異なる 2 本の接線で点 $(u,\ u-1)$ を通るものを ℓ_1，ℓ_2 とする．放物線 C と直線 ℓ_1 の接点を P_1 とし，放物線 C と直線 ℓ_2 の接点を P_2 とする．このとき，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の垂直二等分線 m は y 軸と交わることを示せ．また，u が正の実数全体を動くとき，直線 m と y 軸の交点の y 座標 $q(u)$ の最小値と，それを与える u の値を求めよ．

(26 東北大 理 1 文 1)

【答】

(1) 略

(2) 証明略．$q(u)$ は $u=\dfrac{1}{4}$ のとき，最小値 $\dfrac{11}{8}$ をとる．

【解答】

$$C : y = x^2$$

(1) $$y' = 2x$$

であり，C 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$$y = 2t(x-t)+t^2$$
$$y = 2tx - t^2$$

である．これが点 $(u,\ u-1)$ を通るから

$$u-1 = 2tu - t^2$$
$$t^2 - 2ut + u - 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

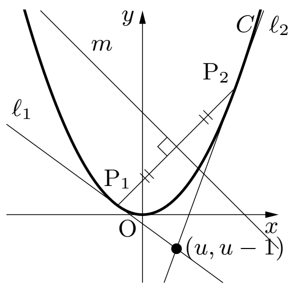
が成り立つ．判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4} = (-u)^2 - (u-1) = u^2 - u + 1 = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

であり，① は異なる 2 つの実数解をもつ．

よって，C の接線で点 $(u,\ u-1)$ を通るものがちょうど 2 本ある．　……(証明終わり)

(2) 点 $(u,\ u-1)$ $(u>0)$ を通る 2 本の接線 ℓ_1，ℓ_2 の接点 P_1，P_2 の座標をそれぞれ $(t_1,\ {t_1}^2)$，$(t_2,\ {t_2}^2)$ とおく．t_1，t_2 は ① の異なる 2 つの実数解であるから



$$t_1 + t_2 = 2u, \quad t_1 t_2 = u - 1$$

が成り立つ．

$$(\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\text{の傾き}) = \frac{{t_2}^2 - {t_1}^2}{t_2 - t_1} = t_2 + t_1 = 2u \ (>0)$$

であり，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の垂直二等分線 m の傾きは

$$(m\text{ の傾き}) = -\frac{1}{2u} \ (<0)$$

である．

垂直二等分線 m は y 軸と平行でないから，y 軸と交わる．　……(証明終わり)

線分 $\mathrm{P_1P_2}$ の中点の座標 $\left(\dfrac{t_1+t_2}{2},\ \dfrac{{t_1}^2+{t_2}^2}{2}\right)$ を u で表すと

$$\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{2u}{2}=u,$$

$$\frac{{t_1}^2+{t_2}^2}{2}=\frac{(t_1+t_2)^2-2t_1t_2}{2}=\frac{(2u^2)-2(u-1)}{2}=2u^2-u+1$$

であるから，m の方程式は

$$y=-\frac{1}{2u}(x-u)+2u^2-u+1$$

$$\therefore\quad m: y=-\frac{1}{2u}x+2u^2-u+\frac{3}{2}$$

である．直線 m と y 軸の交点の y 座標 $q(u)$ は

$$\begin{aligned} q(u)&=2u^2-u+\frac{3}{2}\\ &=2\left(u-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{11}{8}\end{aligned}$$

であり，u が正の実数全体を動くとき，$q(u)$ は

$$\boldsymbol{u=\frac{1}{4}}\text{のとき，最小値 }\boldsymbol{\frac{11}{8}}\qquad\cdots\cdots\text{(答)}$$

をとる．