n を自然数とする．関数

$$f_n(x) = (x-1)^{n+2} + (n+2)x^{n+1} - x^{n+2}$$

について

$$f_n{}'(x) = (n+2)f_{n-1}(x) \quad (n = 2,\ 3,\ \cdots)$$

となることを確かめよ．さらに，命題

p_m： 関数 $y = f_{2m-1}(x)$ は区間 $[0, 1]$ において増加し，そのグラフは x 軸の $0 < x < 1$ の部分と 1 点 $x = x_m$ で交わる

q_m： 区間 $[0, 1]$ において，関数 $y = f_{2m}(x)$ は $x = x_m$ において正の最小値をとる

が真であることを $m = 1,\ 2$ の場合について証明せよ．ここで，x_m は m に応じて決まる，p_m と q_m で共通の実数である．

(26 札幌医大 1(2))

【答】 略

【解答】

$$f_n(x) = (x-1)^{n+2} + (n+2)x^{n+1} - x^{n+2} \quad (n \geqq 1)$$

微分すると

$$\begin{aligned} f_n{}'(x) &= (n+2)(x-1)^{n+1} + (n+2)(n+1)x^n - (n+2)x^{n+1} \\ &= (n+2)\{(x-1)^{n+1} + (n+1)x^n - x^{n+1}\} \\ &= (n+2)f_{n-1}(x) \quad (n \geqq 2) \qquad \cdots\cdots (*) \end{aligned}$$

となる． …… (証明終わり)

(i) $m = 1$ の場合

p_1： 関数 $y = f_1(x)$ は区間 $[0, 1]$ において増加し，そのグラフは x 軸の $0 < x < 1$ の部分と 1 点 $x = x_1$ で交わる

q_1： 区間 $[0, 1]$ において，関数 $y = f_2(x)$ は $x = x_1$ において正の最小値をとる

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x-1)^3 + 3x^2 - x^3 \\ &= 3x - 1 \end{aligned}$$

であり，関数 $y = f_1(x)$ は区間 $[0, 1]$ において増加し，そのグラフは x 軸の $0 < x < 1$ の部分と 1 点 $x = \dfrac{1}{3}(= x_1)$ で交わるから，命題 p_1 は真である． …… (証明終わり)

$$\begin{aligned} f_2(x) &= (x-1)^4 + 4x^3 - x^4 \\ &= (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) + 4x^3 - x^4 \\ &= 6x^2 - 4x + 1 \\ &= 6\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

であり，区間 $[0, 1]$ において，関数 $y = f_2(x)$ は $x = \dfrac{1}{3}(= x_1)$ において正の最小値 $\dfrac{1}{3}$ をとるから，命題 q_1 は真である． …… (証明終わり)

- $(*)$ の利用を考える．

$$f_2(x)=(x-1)^4+4x^3-x^4$$
$$f_2{}'(x)=4f_1(x)=4(3x-1)\quad (\because\ (*))$$

区間 $[0,\,1]$ において $f_2{}'(x)$ の符号は $x=\dfrac{1}{3}$ で負から正に変わるから，$f_2(x)$ は $x=\dfrac{1}{3}$ において極小かつ最小となる．

$$\text{最小値}: f_2\left(\frac{1}{3}\right)=\underset{\oplus}{\left(\frac{1}{3}-1\right)^4}+\underset{\oplus}{\left(4-\frac{1}{3}\right)}\underset{\oplus}{\left(\frac{1}{3}\right)^3}>0$$

であるから，命題 q_1 は真である．

(ii) $m=2$ の場合

p_2： 関数 $y=f_3(x)$ は区間 $[0,\,1]$ において増加し，そのグラフは x 軸の $0<x<1$ の部分と 1 点 $x=x_2$ で交わる

q_2： 区間 $[0,\,1]$ において，関数 $y=f_4(x)$ は $x=x_2$ において正の最小値をとる

$$f_3(x)=(x-1)^5+5x^4-x^5$$

$(*)$ より

$$f_3{}'(x)=5f_2(x)$$

である．命題 q_1 より区間 $[0,\,1]$ においては $f_2(x)>0$ であるから

$$f_3{}'(x)=5f_2(x)>0$$

であり，区間 $[0,\,1]$ において $f_3(x)$ は増加する．さらに

$$f_3(0)=(-1)^5+0-0=-1,$$
$$f_3(1)=0+5-1=4$$

であるから，$y=f_3(x)$ のグラフは x 軸の $0<x<1$ の部分と 1 点で交わる．すなわち，命題 p_2 は真である．　……(証明終わり)

　このときの x の値を α とおくと，$0<\alpha<1$ であり $x_2=\alpha$ である．

$$f_4{}'(x)=6f_3(x)\quad (\because\ (*))$$

命題 p_2 より，区間 $[0,\,1]$ において $f_3{}'(x)$ の符号は $x=\alpha$ で負から正に変わるから，$f_4(x)$ は $x=\alpha$ で極小かつ最小となる．

$$f_4(x)=(x-1)^6+6x^5-x^6=(x-1)^6+(6-x)x^5$$

であり

$$f_4(\alpha)=\underset{\oplus}{(\alpha-1)^6}+\underset{\oplus}{(6-\alpha)}\underset{\oplus}{\alpha^5}>0\quad (\because\ 0<\alpha<1)$$

であるから，命題 q_2 は真である．　……(証明終わり)