a を実数とする．実数全体を定義域とする x の 2 次関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^2 + 4ax - 8x - a^3 + 7a^2 - 7a + 21$$

で定める．$f(x)$ の最小値を m とする．次の問 (1)〜(4) に答えよ．解答欄には，(2) については答えのみを，(1)，(3)〜(5) については答えだけでなく途中経過も書くこと．

(1) $f(x)$ が最小となる x の値を a を用いて表せ．

(2) m を a を用いて表せ．

(3) $m = 0$ となる a の値をすべて求めよ．

(4) (2) より m は a の関数である．この関数を $m = g(a)$ と表す．a がすべての実数を動くとき，$g(a)$ の極値を求めよ．また，そのときの a の値を求めよ．

(5) a が $-2 \leqq a \leqq 6$ の範囲を動くとき，(4) の $g(a)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの a の値をそれぞれ求めよ．

(26 立教大 文系 2 月 6 日 2)

【答】

(1) $x = -2a + 4$

(2) $m = -a^3 + 3a^2 + 9a + 5$

(3) $a = -1,\ 5$

(4) $a = 3$ のとき極大値 32，$a = -1$ のとき極小値 0

(5) $a = 3$ のとき最大値 32，$a = 6$ のとき最小値 -49

【解答】

$$f(x) = x^2 + 4ax - 8x - a^3 + 7a^2 - 7a + 21$$

(1)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 4ax - 8x - a^3 + 7a^2 - 7a + 21 \\ &= (x + 2a - 4)^2 - (2a - 4)^2 - a^3 + 7a^2 - 7a + 21 \\ &= (x + 2a - 4)^2 - a^3 + 3a^2 + 9a + 5 \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

であり，$f(x)$ が最小となる x の値は

$$\boldsymbol{x = -2a + 4} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) ① より，$f(x)$ は $x = -2a + 4$ のとき

最小値 $\boldsymbol{m = -a^3 + 3a^2 + 9a + 5}$ ……(答)

をとる．

(3) $m = 0$ となる a の値は

$$\begin{aligned} &-a^3 + 3a^2 + 9a + 5 = 0 \\ &-(a + 1)^2(a - 5) = 0 \\ \therefore\ \ &\boldsymbol{a = -1,\ 5} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

-1	-1	3	9	5
		1	-4	-5
-1	-1	4	5	0
		1	-5	
	-1	5	0	

である．

(4) (2) より，$g(a) = -a^3 + 3a^2 + 9a + 5$ であり

$$\begin{aligned} g'(a) &= -3a^2 + 6a + 9 \\ &= -3(a + 1)(a - 3) \end{aligned}$$

$g(a)$ の増減は下表となる．

a	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(a)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$g(a)$ は

$\boldsymbol{a=-1}$ **のとき**　**極小値** $g(-1)=1+3-9+5=\mathbf{0}$　……(答)

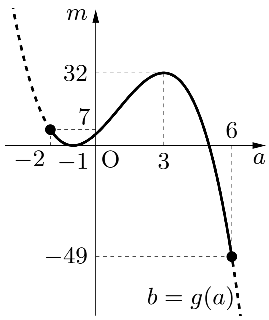
$\boldsymbol{a=3}$ **のとき**　**極大値** $g(3)=-27+27+27+5=\mathbf{32}$　……(答)

である．

(5) am 平面に $m=g(a)$ のグラフを描く．
端点の b 座標は

$$g(-2)=8+12-18+5=7$$
$$g(6)=-216+108+54+5=-49$$

であり，(4) の増減および極値にも注意すると，$-2 \leqq a \leqq 6$ の範囲での $m=g(a)$ のグラフは右図の実線部分となる．



$-2 \leqq a \leqq 6$ の範囲を動くとき，$g(a)$ は

$\boldsymbol{a=3}$ **のとき**　**最大値** $g(3)=\mathbf{32}$　……(答)

$\boldsymbol{a=6}$ **のとき**　**最小値** $g(6)=\mathbf{-49}$　……(答)

をとる．