

$\theta$  が実数全体を動くとき、 $\cos 3\theta - 3 \cos \theta$  の最大値は ウ である。

(26 立教大 文系 2月9日 1(3))

【答】 ウ  
2√2

【解答】

3 倍角の公式より

$$\begin{aligned} \cos 3\theta - 3 \cos \theta &= (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) - 3 \cos \theta \\ &= 4 \cos^3 \theta - 6 \cos \theta \\ &= 4t^3 - 6t \quad (t = \cos \theta \text{ とおいた}) \end{aligned}$$

$f(t) = 4t^3 - 6t$  とおくと、与式の最大値は  $-1 \leq t \leq 1$  における  $f(t)$  の最大値と一致する。

$$f'(t) = 12t^2 - 6 = 6(2t^2 - 1)$$

であり、 $-1 \leq t \leq 1$  での  $f(t)$  の増減は下表となる。

$t$	-1	...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	1
$f'(t)$		+	0	-	0	+	
$f(t)$		↗		↘		↗	

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= 4 \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - 6 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \\ f(1) &= 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 = -2 \end{aligned}$$

$f(t)$  は  $t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  で極大かつ最大となる。求める最大値は

$$2\sqrt{2}$$

.....(答)

である。