関数 $f(x) = x^4 - x^2$ を考える．座標平面において，x 軸と平行な直線 ℓ は曲線 $y = f(x)$ 上の相異なる 2 点における接線であるとする．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求め，$y = f(x)$ のグラフをかけ．

(2) 直線 ℓ の方程式を求めよ．なお，解答は答えのみでよい．

(3) 直線 ℓ と異なる直線 m は曲線 $y = f(x)$ とちょうど 2 つの共有点をもち，かつ x 軸と平行であるとする．直線 ℓ と曲線 $y = f(x)$ で囲まれる部分の面積を S とし，直線 m と曲線 $y = f(x)$ で囲まれる部分の面積を T とするとき，$\dfrac{T}{S} > \sqrt{2}$ が成り立つことを示せ．

(26 東北大 文系 4)

【答】

(1) 極大値 $f(0) = 0$，極小値 $f\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$，図は略．

(2) $\ell : y = -\dfrac{1}{4}$

(3) 略

【解答】

$$f(x) = x^4 - x^2$$
$$= x^2(x+1)(x-1)$$

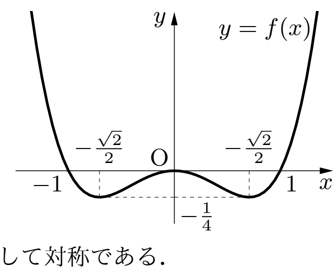
(1) $$f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$$

$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

極大値： $f(0) = \mathbf{0}$ ……(答)

極小値： $f\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = \boldsymbol{-\dfrac{1}{4}}$ ……(答)



であり，$y = f(x)$ のグラフは右図となる．

- $f(x)$ は偶関数であり，$y = f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である．

(2) 直線 ℓ は x 軸と平行で曲線 $y = f(x)$ 上の相異なる 2 点における接線であるから，直線 ℓ の方程式は

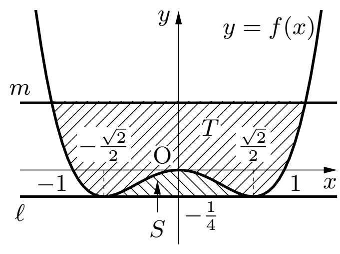
$$\boldsymbol{\ell : y = -\frac{1}{4}} \quad \text{……(答)}$$

である．

(3) x 軸と平行で曲線 $y = f(x)$ とちょうど 2 つの共有点をもつ直線 ℓ, m は右図となる．m の方程式は

$$m : y = b \ (b \text{ は } 0 \text{ より大きい定数})$$

と表すことができる．



直線 ℓ と曲線 $y=f(x)$ で囲まれる部分の面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left\{ f(x) - \left(-\frac{1}{4}\right) \right\} dx \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(x^4 - x^2 + \frac{1}{4} \right) dx \\
&= 2\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4}x \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad (\because\ \text{偶関数}) \\
&= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{40} - \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{8} \right) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{15}
\end{aligned}$$

である．

次に，直線 m と曲線 $y=f(x)$ で囲まれる部分の面積 T を求める．

$f(x)=b\ (b>0)$ の実数解はちょうど 2 つあり，$y=f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称であるから $x=\pm a\ (a>1)$ とおくことができる．

$$\begin{aligned}
T &= \int_{-a}^{a} \{ b - f(x) \} dx \\
&= \int_{-a}^{a} \{ (a^4 - a^2) - (x^4 - x^2) \} dx \quad (\because\ a^4 - a^2 = b) \\
&= 2\left[(a^4 - a^2)x - \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right]_0^a \quad (\because\ \text{偶関数}) \\
&= 2\left(\frac{4}{5}a^5 - \frac{2}{3}a^3 \right)
\end{aligned}$$

である．したがって

$$\begin{aligned}
T - \sqrt{2}S &= 2\left(\frac{4}{5}a^5 - \frac{2}{3}a^3 \right) - \sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{15} \\
&= \frac{4}{15}(6a^5 - 5a^3 - 1) \\
&= \frac{4}{15}(a-1)(6a^4 + 6a^3 + a^2 + a + 1) \\
&> 0 \quad (\because\ a > 1)
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$\frac{T}{S} > \sqrt{2} \qquad \cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

が成り立つ．

- $b>0$ を満たす任意の直線 m に対して，$\dfrac{T}{S} > \sqrt{2}$ を示すには，$b=0$ としたときの直線 $y=0$ と曲線 $y=f(x)$ で囲まれる部分の面積を U とおくと，$T>U$ であるから $\dfrac{U}{S} \geqq \sqrt{2}$ を示せばよい．

$$U = \int_{-1}^{1} \{-f(x)\} dx = 2\left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{15}$$

$$\therefore\quad \frac{U}{S} = \frac{4}{15} \times \frac{15}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

よって

$$\frac{T}{S} > \sqrt{2}$$

が成り立つ．