t を 1 と異なる正の定数とする．座標平面において，x の 3 次関数

$$f(x) = x^3 - (t+1)x^2 + tx$$

のグラフを $C : y = f(x)$ とする．C と x 軸で囲まれた 2 つの部分のうち，$y \geqq 0$ の範囲にある部分の面積を $S_1(t)$，$y \leqq 0$ の範囲にある部分の面積を $S_2(t)$ とする．このとき，次の問 (1)〜(5) に答えよ．解答欄には，(1)，(2) については答えのみを，(3)〜(5) については答えだけでなく途中経過も書くこと．ただし，(1)，(2) の答えに t を用いてよい．

(1) $F'(x) = f(x)$ かつ $F(0) = 0$ を満たす x の関数 $F(x)$ を求めよ．
(2) 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ．
(3) $0 < t < 1$ のとき，$S_1(t)$ を t を用いて表せ．
(4) $t > 1$ のとき，$S_1(t)$ を t を用いて表せ．
(5) $S_1(t) = S_2(t)$ を満たす t をすべて求めよ．

(26 立教大 文系 2 月 9 日 2)

【答】

(1) $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{t+1}{3}x^3 + \dfrac{t}{2}x^2$
(2) $x = 0,\ 1,\ t$
(3) $S_1(t) = -\dfrac{1}{12}t^4 + \dfrac{1}{6}t^3$
(4) $S_1(t) = \dfrac{1}{6}t - \dfrac{1}{12}$
(5) $t = \dfrac{1}{2},\ 2$

【解答】

$$C : y = f(x) = x^3 - (t+1)x^2 + tx \quad (t > 0,\ t \fallingdotseq 1)$$

(1) $F'(x) = f(x)$ より

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,dx \\ &= \frac{x^4}{4} - (t+1)\frac{x^3}{3} + t\frac{x^2}{2} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

である．さらに $F(0) = 0$ であるから

$$0 = 0 - 0 + 0 + C \qquad \therefore \quad C = 0$$

である．よって

$$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{t+1}{3}x^3 + \frac{t}{2}x^2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

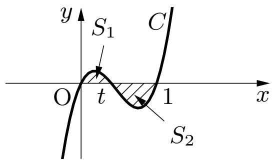
(2)
$$f(x) = x(x-1)(x-t)$$

であるから，$f(x) = 0$ の解は

$$\boldsymbol{x = 0,\ 1,\ t} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

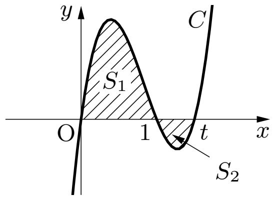
(3) $0<t<1$ のとき，C は右図となる．S_1，S_2 は右図の斜線部分の面積である．



$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^t f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_0^t \\ &= \frac{1}{4}t^4 - \frac{t+1}{3}t^3 + \frac{t}{2}t^2 \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{6}t^3} \end{aligned}$$ ……(答)

である．

(4) $t>1$ のとき，C は右図となる．



$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}\cdot 1^4 - \frac{t+1}{3}\cdot 1^3 + \frac{t}{2}\cdot 1^2 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}t - \frac{1}{12}} \end{aligned}$$ ……(答)

である．

(5) $$S_1(t) = S_2(t) \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

(i) $0<t<1$ のとき

$$\begin{aligned} (*) &\iff \int_0^t f(x)\,dx - \int_t^1 \{-f(x)\}\,dx = 0 \\ &\iff \int_0^1 f(x)\,dx = 0 \\ &\iff \frac{1}{6}t - \frac{1}{12} = 0 \quad (\because\ (4)) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad t = \frac{1}{2}$$

これは $0<t<1$ を満たす．

(ii) $t>1$ のとき

$$\begin{aligned} (*) &\iff \int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^t \{-f(x)\}\,dx = 0 \\ &\iff \int_0^t f(x)\,dx = 0 \\ &\iff -\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{6}t^3 = 0 \quad (\because\ (3)) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad t = 0,\ 2$$

$t>1$ より　$t=2$ である．

以上 (i)，(ii) より，求める t のすべては

$$\boldsymbol{t = \frac{1}{2},\ 2}$$ ……(答)

である．