xy 平面上の円 $x^2-4\sqrt{3}x+y^2-8y+12=0$ を C とする．

C の半径は $\boxed{32}$ である．また，C と x 軸との共有点は $\left(\boxed{33}\sqrt{\boxed{34}},\ 0\right)$ のみであり，C と y 軸との共有点は $\left(0,\ \boxed{35}\right)$ と $\left(0,\ \boxed{36}\right)$ の 2 点である．ただし，$\boxed{35}<\boxed{36}$ とする．

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが 3 点

$$\left(\boxed{33}\sqrt{\boxed{34}},\ 0\right),\quad \left(0,\ \boxed{35}\right),\quad \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$$

を通るとき，

$$a=\frac{\boxed{37}\boxed{38}}{\boxed{39}},\quad b=\frac{\boxed{40}\sqrt{\boxed{41}}}{\boxed{42}},\quad c=\boxed{43}$$

である．

連立不等式

$$\begin{cases} x^2-4\sqrt{3}x+y^2-8y+12\leqq 0 \\ y\leqq \dfrac{\boxed{37}\boxed{38}}{\boxed{39}}x^2+\dfrac{\boxed{40}\sqrt{\boxed{41}}}{\boxed{42}}x+\boxed{43} \end{cases}$$

が表す領域の面積は

$$\frac{\boxed{44}}{\boxed{45}}\pi-\boxed{46}\sqrt{\boxed{47}}$$

である．

(26 青山学院大 全学部 文系 4)

【答】

32	33	34	35	36	3738	39	40	41	42	43	44	45	46	47
4	2	3	2	6	-1	2	2	3	3	2	8	3	2	3

【解答】

$$C:\ x^2-4\sqrt{3}x+y^2-8y+12=0$$

$$(x-2\sqrt{3})^2+(y-4)^2=16$$

であり，円 C の半径は　**4**　である．　……(答)

また，C と x 軸との共有点は

$$(x-2\sqrt{3})^2+(0-4)^2=16 \qquad \therefore\quad x=2\sqrt{3}$$

より

$$(\mathbf{2\sqrt{3}},\ 0) \qquad \cdots\cdots(答)$$

のみであり，C と y 軸との共有点は

$$(0-2\sqrt{3})^2+(y-4)^2=16 \qquad \therefore\quad y=4\pm\sqrt{16-12}=2,\ 6$$

より，

$$(0,\ \mathbf{2}),\quad (0,\ \mathbf{6}) \qquad \cdots\cdots(答)$$

の 2 点である．

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは 2 点 $(2\sqrt{3},\ 0)$，$\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$ を通るから

$$y = a\left(x - 2\sqrt{3}\right)\left(x + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

とおくことができ，さらに点 $(0,\ 2)$ を通るから

$$2 = a\left(0 - 2\sqrt{3}\right)\left(0 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \qquad \therefore \quad a = -\frac{1}{2}$$

である．このとき

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}\left(x - 2\sqrt{3}\right)\left(x + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}x - 4\right) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + 2 \end{aligned}$$

であり

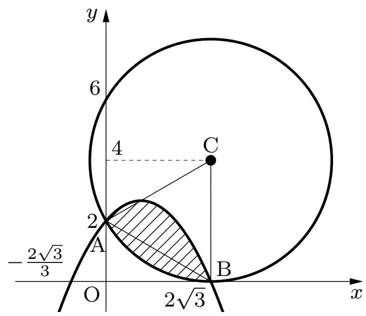
$$a = \boldsymbol{\frac{-1}{2}}, \quad b = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}}, \quad c = \boldsymbol{2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

連立不等式

$$\begin{cases} x^2 - 4\sqrt{3}x + y^2 - 8y + 12 \leqq 0 \\ y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}x + 2 \end{cases}$$

が表す領域は右図の斜線部分である．



$$\mathrm{A}(0,\ 2),\ \mathrm{B}\left(2\sqrt{3},\ 0\right),\ \mathrm{C}\left(2\sqrt{3},\ 4\right)$$

とおくと

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$$

であり，$\triangle\mathrm{ABC}$ は一辺の長さが 4 の正三角形である．斜線部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= (\text{扇形 CAB} - \triangle\mathrm{CAB}) + \left\{\int_0^{2\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + 2\right)dx - \triangle\mathrm{OAB}\right\} \\ &= \left(\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right) + \left\{\left[-\frac{x^3}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + 2x\right]_0^{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\right\} \\ &= \left(\frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}\right) + \{(-4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}\} \\ &= \boldsymbol{\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．