(1) k を実数とし，3 次関数 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + k$ を考える．

(i) $f'(x) = \boxed{\text{ア}}$ である．

$x = \boxed{\text{イ}}$ のとき，$f(x)$ は極大値 $\boxed{\text{ウ}}$ をとる．

$x = \boxed{\text{エ}}$ のとき，$f(x)$ は極小値 $\boxed{\text{オ}}$ をとる．

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{3}x^2 - 2x + 3$	① $\dfrac{1}{3}x^2 - 2x + 3 + k$
② $x^2 - 4x + 3$	③ $x^2 - 4x + 3 + k$
④ $\dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + kx$	⑤ $\dfrac{1}{3}x^4 - 2x^3 + 3x^2 + kx$

$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい．)

⓪ 0	① 1	② 2	③ $\dfrac{2}{3}$	④ $\dfrac{4}{3}$
⑤ k	⑥ $-\dfrac{4}{3} + k$	⑦ $-\dfrac{4}{3} + k$	⑧ $\dfrac{2}{3} + k$	⑨ $\dfrac{4}{3} + k$

(ii) $y = f(x)$ のグラフの概形は

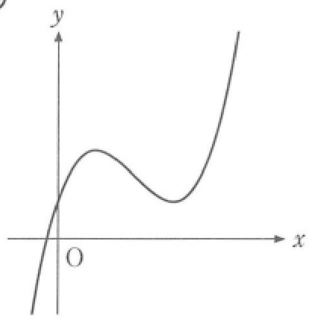
$k = 0$ のとき $\boxed{\text{カ}}$

$k > 0$ のとき $\boxed{\text{キ}}$

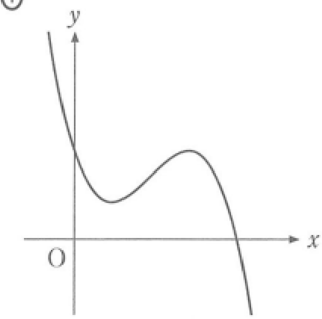
である．

$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤ のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

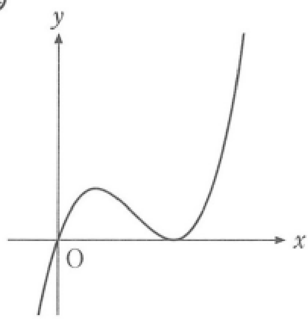
⓪



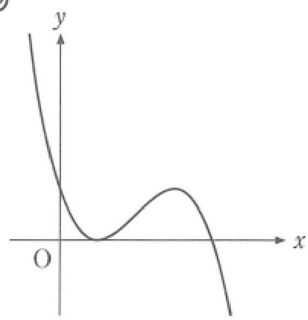
①



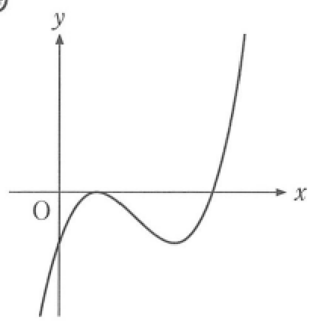
②



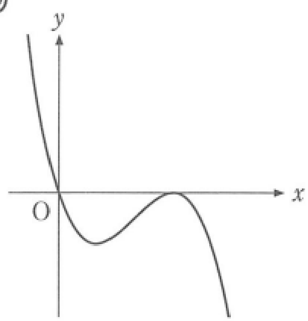
③



④



⑤



(iii) (i) で求めた $\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ のうち，小さい方の数を α とする．$f(0) < 0 < f(\alpha)$ を満たすような k の値の範囲は $\boxed{\text{ク}} < k < \boxed{\text{ケ}}$ である．

k は $\boxed{\text{ク}} < k < \boxed{\text{ケ}}$ を満たすとする．$0 \leqq x \leqq \alpha$ の範囲において，$f(x) = 0$ を満たす x の値を β とおく．$0 \leqq x \leqq \beta$ の範囲における $y = f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積と，$\beta \leqq x \leqq \alpha$ の範囲における $y = f(x)$ のグラフと x 軸および直線 $x = \alpha$ で囲まれた部分の面積が等しいとする．

このとき，$\boxed{\text{コ}}$ が成り立つ．したがって，$k = \dfrac{\boxed{\text{サシス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である．

$\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい．)

⓪ 0	① $\frac{2}{3}$	② $\frac{3}{4}$	③ $\frac{4}{3}$	④ $\frac{3}{2}$
⑤ $\frac{5}{2}$	⑥ $-\frac{2}{3}$	⑦ $-\frac{3}{4}$	⑧ $-\frac{4}{3}$	⑨ $-\frac{3}{2}$

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ $\displaystyle\int_0^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\beta}^{a} f(x)\,dx$	① $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = 0$
② $\displaystyle\int_0^{\beta} f(x)\,dx = 0$	③ $\displaystyle\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$

(2) 3 次関数 $g(x)$ に対して，与えられた条件のもとで $y = g(x)$ のグラフの概形を考えよう．

- 次の条件 (a) を考える．

  条件 (a)　$g(0) = 0$ かつ $g'(0) > 0$ である．

  後の ⓪～⑦ のうち，条件 (a) を満たす関数 $y = g(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{タ}}$，$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ の三つであり，残りの五つは条件 (a) を満たさない．ただし，$\boxed{\text{タ}}$，$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ の解答の順序は問わない．

- 条件 (a) に加えて，次の条件 (b) を考える．

  条件 (b)　$y = g'(x)$ のグラフは直線 $x = 0$ を軸とする放物線である．

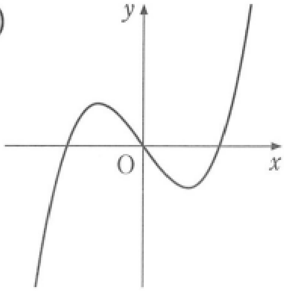
  後の ⓪～⑦ のうち，条件 (a)，(b) をともに満たす関数 $y = g(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{テ}}$，$\boxed{\text{ト}}$ の二つであり，残りの六つは条件 (a)，(b) の少なくとも一方を満たさない．ただし，$\boxed{\text{テ}}$，$\boxed{\text{ト}}$ の解答の順序は問わない．

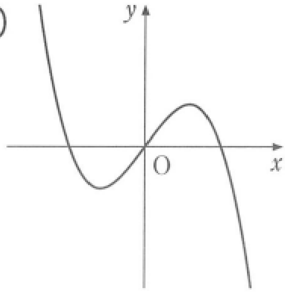
- 条件 (a)，(b) に加えて，次の条件 (c) を考える．

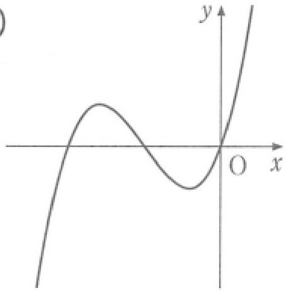
  条件 (c)　$y = g'(x)$ のグラフは下に凸の放物線である．

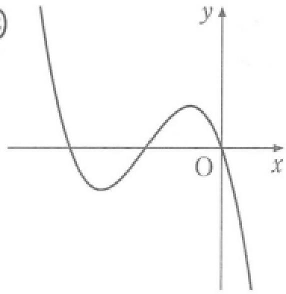
  後の ⓪～⑦ のうち，条件 (a)，(b)，(c) のすべてを満たす関数 $y = g(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{ナ}}$ の一つだけである．

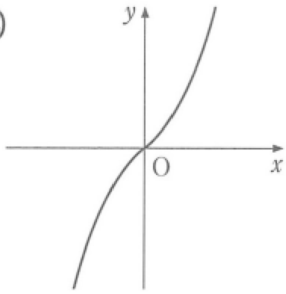
$\boxed{タ}$ ～ $\boxed{ナ}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑦ のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

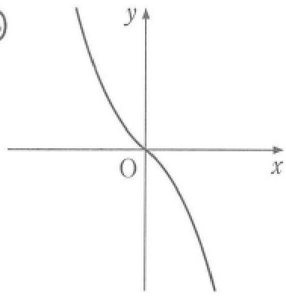
⓪


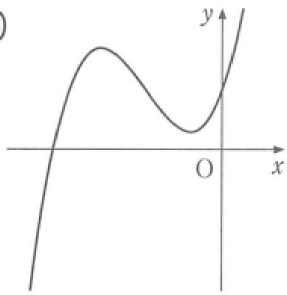
①


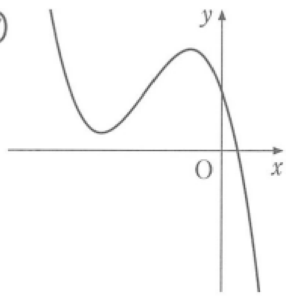
②


③


④


⑤


⑥


⑦


(26 共通テスト 本試験 IIBC 3)

【答】	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サシス	セソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ
	2	1	9	3	5	2	0	8	0	1	−11	12	1	2	4	1	4	4

【解答】

(1) $$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+k$$

(i) 微分すると

$$f'(x)=\boldsymbol{x^2-4x+3} \quad ②$$ ……(答)

$$=(x-1)(x-3)$$

であり，$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

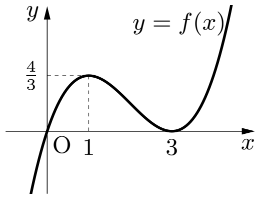
$f(x)$ は

$x=\boldsymbol{1}$ のとき，極大値 $f(1)=\frac{1}{3}-2+3+k=\boldsymbol{\frac{4}{3}+k}$ ⑨ ……(答)

$x=\boldsymbol{3}$ のとき，極小値 $f(3)=9-18+9+k=\boldsymbol{k}$ ⑤ ……(答)

をとる．

(ii) $k=0$ のとき，$f(x)$ は

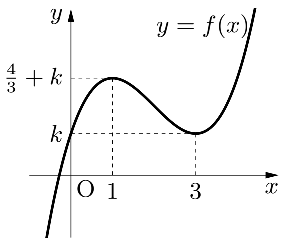


$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$$
$$=\frac{1}{3}x(x-3)^2$$

であり，極大値 $f(1)=\frac{4}{3}$，極小値 $f(3)=0$ をとるから，

$y=f(x)$ のグラフの概形は ② (右図) となる． ……(答)

$k>0$ のとき，$f(x)$ は



$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+k$$
$$=\frac{1}{3}x(x-3)^2+k$$

であり，極大値 $f(1)=\frac{4}{3}+k$，極小値 $f(3)=k$ をとるから，

$y=f(x)$ のグラフの概形は ⓪ (右図) となる． ……(答)

- $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$(複号同順) から，グラフの選択肢は ⓪, ②, ④ に絞られる．

  さらに，$f(0)=k$ であるから，$y=f(x)$ のグラフの概形は

  $k=0$ のとき，②,　　$k>0$ のとき，⓪

  である．

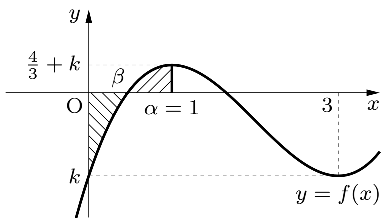
(iii) (i) で求めた $x=1,\ 3$ のうちの小さい方の値 1 を α とおく．
$f(0)<0<f(\alpha)$ を満たすような k の値の範囲は

$$f(0)<0<f(1) \iff k<0<\frac{4}{3}+k$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{-\frac{4}{3}}<k<\boldsymbol{0} \quad ⑧,\ ⓪$$ ……(答)

である．

$-\frac{4}{3}<k<0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフは右図となり，$0\leqq x\leqq\beta$ の範囲における $y=f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた部分と，$\beta\leqq x\leqq\alpha$ の範囲における $y=f(x)$ のグラフと x 軸および直線 $x=\alpha$ で囲まれた部分は右図の斜線部分となる．



この 2 つの斜線部分の面積は等しいから

$$\int_0^{\beta}\{-f(x)\}\,dx=\int_{\beta}^{\alpha}f(x)\,dx$$

$$\int_0^{\beta}f(x)\,dx+\int_{\beta}^{\alpha}f(x)\,dx=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\int_0^{\alpha}f(x)\,dx=0}\qquad ①$$ ……(答)

が成り立つ．

$$\begin{aligned}\int_0^{\alpha}f(x)\,dx&=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+k\right)dx\\&=\left[\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+kx\right]_0^1\\&=\frac{1}{12}-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+k\\&=k+\frac{11}{12}\end{aligned}$$

であるから，$\int_0^{\alpha}f(x)\,dx=0$ を満たす k の値は

$$k=\boldsymbol{\frac{-11}{12}}$$ ……(答)

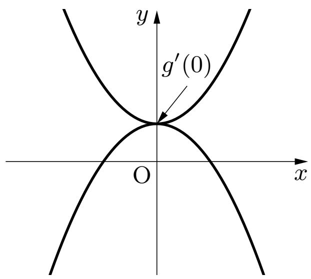
である．

(2) 条件 (a)　$g(0)=0$ かつ $g'(0)>0$ である．
条件 (b)　$y=g'(x)$ のグラフは直線 $x=0$ を軸とする放物線である．
条件 (c)　$y=g'(x)$ のグラフは下に凸の放物線である．

- $g(0)=0$ を満たすグラフは ⓪〜⑤ であり，このうち $g'(0)>0$ を満たす (原点における接線の傾きが正である) グラフは

  ①, ②, ④ ……(答)

  である．
- 条件 (a) に加えて，条件 (b) も満たすときを考える．
  $g'(0)>0$ であり，放物線 $y=g'(x)$ は直線 $x=0$ を軸としているから，
  $g'(x)$ の 2 次の係数が正のとき，放物線は下に凸であり，すべての実数 x に対し $g'(x)>0$ が成り立つ (⓪)，
  $g'(x)$ の 2 次の係数が負のとき，放物線は上に凸であり，y 軸と対称な位置で x 軸と交わり，$g'(x)$ の符号を変える．すなわち，$y=f(x)$ のグラフは y 軸と対称な x の値で極値をもつ (④)．

  $y=g'(x)$ のグラフ

  すなわち，条件 (a), (b) をともに満たす関数 $y=g(x)$ のグラフの概形は

  ①, ④ ……(答)

  である．
- 条件 (a)，(b) に加えて，「条件 (c) : $y=g'(x)$ のグラフは下に凸の放物線である」を満たすから，すべての実数 x に対し $g'(x)>0$ であり，$y=g(x)$ は単調増加である．
  よって，条件 (a), (b), (c) をともに満たす関数 $y=g(x)$ のグラフの概形は

  ④ ……(答)

  である．