関数 $f(x)=x^3-2x^2$ について，次の問いに答えよ．ただし，$a$ は $a>2$ を満たす定数とする．

(1) $f(x)$ の極値をすべて求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq a$ における $f(x)$ の最大値を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^a |f(x)|\,dx$ を求めよ．

(26 北海道大 文系 1)

---

【答】

(1) 極大値 0，極小値 $-\dfrac{32}{27}$

(2) $f(a)=a^3-2a^2$

(3) $\dfrac{a^4}{4}-\dfrac{2}{3}a^3+\dfrac{8}{3}$

---

【解答】

$$f(x)=x^3-2x^2$$

(1) $$f'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$$

$f(x)$ の増減は下表となる．

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{4}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ | | ↗ |

$f(x)$ は

$x=0$ のとき，**極大値 $\boldsymbol{f(0)=0}$** ……(答)

$x=\dfrac{4}{3}$ のとき，**極小値** $\boldsymbol{f\left(\frac{4}{3}\right)}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}-2\right)=\boldsymbol{-\frac{32}{27}}$ ……(答)

をとる．

(2) (1) の結果と

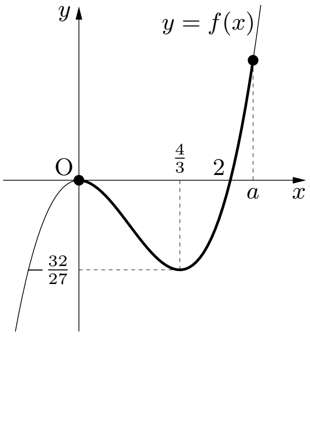
$$f(2)=2^3-2\cdot 2^2=0$$

をあわせると，$0 \leqq x \leqq a$ $(a>2)$ における $f(x)$ のグラフは右図の太線部分となる．

よって，$0 \leqq x \leqq a$ $(a>2)$ における $f(x)$ の最大値は

$\boldsymbol{f(a)=a^3-2a^2}$ ……(答)

である．




(3) (2) のグラフより

$$|f(x)|=\begin{cases}0 \leqq x \leqq 2 \text{ のとき} & -f(x)\\ 2 \leqq x \leqq a \text{ のとき} & f(x)\end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_0^a |f(x)|\,dx &= \int_0^2 \{-f(x)\}\,dx+\int_2^a f(x)\,dx\\ &= -\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3\right]_0^2+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3\right]_2^a\\ &= -\left(4-\frac{16}{3}\right)\times 2+\left(\frac{a^4}{4}-\frac{2}{3}a^3\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{a^4}{4}-\frac{2}{3}a^3+\frac{8}{3}}\end{aligned}$$ ……(答)

である．