$a,\ b,\ c,\ d$ を定数とする．関数 $f(x)$ を $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ と定める．また，関数 $f(x)$ が $x=-1$ で極小値 0，$x=0$ で極大値 1 をとるとする．

(1) $a,\ b,\ c,\ d$ の値を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の $x=t$ での極値 $f(t)$ を求めよ．ただし，t は -1 と 0 を除く．

(3) (2) の t に対し，定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{t} f(x)\,dx$ を求めよ．

(26 室蘭工大 1)

【答】

(1) $a=0,\ b=-2,\ c=0,\ d=1$

(2) 極小値 $f(1)=0$

(3) $\dfrac{16}{15}$

【解答】

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$$

(1) 微分すると

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$$

となる．関数 $f(x)$ が $x=-1$ で極小値 0，$x=0$ で極大値 1 をとるから

$$\begin{cases} f(-1)=0 \\ f'(-1)=0 \\ f(0)=1 \\ f'(0)=0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} 1-a+b-c+d=0 \\ -4+3a-2b+c=0 \\ d=1 \\ c=0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} c=0 \\ d=1 \\ a-b=2 \\ 3a-2b=4 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a=0,\ b=-2,\ c=0,\ d=1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) (1) から

$$f(x)=x^4-2x^2+1$$

$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$$

であり，$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

-1 と 0 を除くときの極値をとる x の値 t は $t=1$ であり，このときの極値 $f(t)$ は

$$f(1)=1-2+1=\mathbf{0} \quad (極小値) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $t=1$ であるから

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{1} (x^4-2x^2+1)\,dx \\ &= 2\int_{0}^{1} (x^4-2x^2+1)\,dx \quad (\because\ f(x)\ は偶関数) \\ &= 2\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1 \\ &= 2\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{16}{15}} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．