$a,\ b,\ c,\ d$ は実数とし，実数全体を定義域とする関数

$$f(x)=\begin{cases}8x^3-6x^2+2 & (|x|\leqq 1\text{ のとき})\\ 3x^4+ax^3+bx^2+cx+d & (|x|>1\text{ のとき})\end{cases}$$

はすべての x の値で微分可能であるとする．以下の問いに答えよ．

(1) $a,\ b,\ c,\ d$ の値を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の最小値と，それを与える x の値を求めよ．

(26 東北大 理系 3)

【答】

(1) $a=8,\ b=-12,\ c=0,\ d=5$

(2) $x=-1-\sqrt{3}$ のとき，最小値 $-39-24\sqrt{3}$

【解答】

$$f(x)=\begin{cases}8x^3-6x^2+2 & (|x|\leqq 1\text{ のとき})\\ 3x^4+ax^3+bx^2+cx+d & (|x|>1\text{ のとき})\end{cases}$$

(1)
$$f_1(x)=8x^3-6x^2+2 \quad (|x|\leqq 1\text{ のとき})$$
$$f_2(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx+d \quad (|x|>1\text{ のとき})$$

とおく．$f(x)$ はすべての x の値で微分可能であるから，$x=\pm 1$ で連続であり

$$\begin{cases}f_1(-1)=\displaystyle\lim_{x\to -1-0}f_2(x)\\ f_1(1)=\displaystyle\lim_{x\to 1+0}f_2(x)\end{cases} \iff \begin{cases}-12=3-a+b-c+d\\ 4=3+a+b+c+d\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}a+c=8 & \cdots\cdots ①\\ b+d=-7 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

が成り立つ．また，$f(x)$ は $x=\pm 1$ で微分可能である．

$$f_1{}'(x)=24x^2-12x \quad (|x|<1\text{ のとき})$$
$$f_2{}'(x)=12x^3+3ax^2+2bx+c \quad (|x|>1\text{ のとき})$$

であるから

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to -1+0}f_1{}'(x)=\lim_{x\to -1-0}f_2{}'(x)\\ \displaystyle\lim_{x\to 1-0}f_1{}'(x)=\lim_{x\to 1+0}f_2{}'(x)\end{cases} \iff \begin{cases}36=-12+3a-2b+c\\ 12=12+3a+2b+c\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}3a+c=24 & \cdots\cdots ③\\ b=-12 & \cdots\cdots ④\end{cases}$$

が成り立つ．①, ②, ③, ④ より

$$\boldsymbol{a=8,\ c=0,\ b=-12,\ d=5} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (1) の $a,\ b,\ c,\ d$ のとき，$f(x)$ はすべての x の値で微分可能であるから

$$f(x)=\begin{cases}8x^3-6x^2+2 & (|x|\leqq 1\text{ のとき})\\ 3x^4+8x^3-12x^2+5 & (|x|\geqq 1\text{ のとき})\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}f_1{}'(x)=24x^2-12x=12x(2x-1) & (|x|\leqq 1\text{ のとき})\\ f_2{}'(x)=12x^3+24x^2-24x=12x(x^2+2x-2) & (|x|\geqq 1\text{ のとき})\end{cases}$$

である．

$|x| \geqq 1$ における $f_2{}'(x)=0$ の解は $x=-1-\sqrt{3}$ であることに注意すると，$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	$-1-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	-12	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	4	$\nearrow$

$f(x)$ の最小値は $f(-1-\sqrt{3})$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$ の大小により決まる．

$$3x^4+8x^3-12x^2+5=(x^2+2x-2)(3x^2+2x-10)+24x-15$$

であるから

$$f(-1-\sqrt{3})=24(-1-\sqrt{3})-15=-39-24\sqrt{3}$$

である．また

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=8\left(\frac{1}{2}\right)^3-6\left(\frac{1}{2}\right)^2+2=1-\frac{3}{2}+2=\frac{3}{2}$$

であり，$f(-1-\sqrt{3})<f\left(\frac{1}{2}\right)$ である．

よって，$f(x)$ は

$$\boldsymbol{x=-1-\sqrt{3}\text{のとき，最小値}\ -39-24\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

- $y=f(x)$ のグラフは右図となる．