自然数 n に対して，

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^{n-1}\theta\cos(n+1)\theta\,d\theta$$

とおく．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，

$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta$$

を用いてもよい．

(1) I_2 を求めよ．

(2) $n \geqq 3$ に対して，部分積分法を用いて I_n を求めよ．

(3) 自然数 k に対して，$a_k = \dfrac{I_{6k-2}I_{6k-1}}{I_{6k}I_{6k-3}}$ とおく．このとき，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k$ を求めよ．

(26 愛知県大 情報科学 2)

【答】

(1) $I_2 = -\dfrac{3}{16}$

(2) $I_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \cos\dfrac{n\pi}{3}$

(3) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = \frac{1}{4}$

【解答】

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^{n-1}\theta\cos(n+1)\theta\,d\theta \quad (n \text{ は自然数})$$

(1) 積を和に直す公式を用いると

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\cos3\theta\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\{\sin4\theta + \sin(-2\theta)\}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos4\theta}{4} + \frac{\cos2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right\} \\
&= -\boldsymbol{\frac{3}{16}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

(2) ヒントの式 (cos の加法定理) を用いて式変形すると

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^{n-1}\theta\cos(n+1)\theta\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^{n-1}\theta\{\cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta\}\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{\left(\frac{\sin^n\theta}{n}\right)'\cos n\theta - \sin^n\theta\sin n\theta\right\}\,d\theta \\
&= \left[\frac{\sin^n\theta}{n}\cos n\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n\theta}{n}(-\sin n\theta)\cdot n - \int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^n\theta\sin n\theta\,d\theta \\
&\qquad (\because \text{ 部分積分法}) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

(3) (2) より

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{I_{6k-2}I_{6k-1}}{I_{6k}I_{6k-3}} \\
&= \frac{\dfrac{1}{6k-2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{6k-2}\cos\dfrac{(6k-2)\pi}{3}\cdot\dfrac{1}{6k-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{6k-1}\cos\dfrac{(6k-1)\pi}{3}}{\dfrac{1}{6k}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{6k}\cos\dfrac{6k\pi}{3}\cdot\dfrac{1}{6k-3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{6k-3}\cos\dfrac{(6k-3)\pi}{3}} \\
&= \frac{\dfrac{1}{6k-2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{6k-1}\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{6k}\cdot\dfrac{1}{6k-3}(-1)} \\
&= \frac{6k(6k-3)}{(6k-2)(6k-1)}\cdot\frac{1}{4} \\
&= \frac{1\cdot\left(1-\dfrac{1}{2k}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{3k}\right)\left(1-\dfrac{1}{6k}\right)}\cdot\frac{1}{4} \\
&\underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \boldsymbol{\lim_{k\to\infty} a_k = \frac{1}{4}}$ ……(答)

である.